Übungen zu Analysis 3, 7. Übung

1. Zeige: Die Funktion
$$f(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}+itx}\, d\lambda(x), \quad t \in \mathbb{R}$$
ist wohldefiniert, stetig differenzierbar, und es gilt $f'(t) + tf(t) = 0$. Folgere daraus dass $f(t) = \sqrt{2\pi}\exp(-\frac{t^2}{2})$, $t \in \mathbb{R}$. Rechtfertige dabei alle auftretenden Vertauschungen jeglicher Limiten mit Hilfe von Mitteln aus der aktuellen Vorlesung bzw. Maßtheorie.

2. Sei $\mu : \mathfrak{B}(\mathbb{T}) \to [0, +\infty)$ ein endliches Maß auf $\mathbb{T}$ $(= \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\})$, wobei $\mathfrak{B}(\mathbb{T}) := \mathfrak{B}_2 \cap \mathbb{T}$. Zeigen Sie, dass durch $(z \in \mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\})$
$$f(z) = \int_{\mathbb{T}} \frac{\zeta + z}{\zeta - z}\, d\mu(\zeta)$$
eine auf $\mathbb{D}$ holomorphe Funktion ist.

   Hinweis: Jede kompakte Teilmenge von $\mathbb{D}$ ist in $r \cdot \mathbb{D}$ für hinreichend großes $r < 1$ enthalten. Warum?

3. Zeigen Sie, dass die Funktion f aus dem letzten Beispiel auch durch
$$f(z) = \int_{[0,2\pi)} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z}\, d\tilde{\mu}(t)$$
mit einem Maß $\tilde{\mu}$ auf $[0, 2\pi)$ darstellbar ist. Geben Sie an, wie μ und $\tilde{\mu}$ in Verbindung stehen.

4. Mit der Notation aus dem vorletzten und dem letzten Beispiel gebe man eine Darstellung von $\operatorname{Re} f(z)$ an, und zeige damit, dass immer $\operatorname{Re} f(z) \geq 0$.

   Weiters Berechne man f, wenn $\tilde{\mu} = \lambda|_{\mathfrak{B}([0,2\pi))}$ und wenn $\tilde{\mu}$ das Punktmaß bei 0 ist.

5. Zeigen Sie, dass für $f \in L^2(\mathbb{R}) \cup L^1(\mathbb{R})$ ($\mathbb{R}$ versehen mit dem Lebesgueschen Maß) und für jedes $p(z) \in \mathbb{C}[z]$ und $w \in \mathbb{C}$ die Funktionen $t \mapsto f(t)p(t)\exp(-t^2)$ und $t \mapsto f(t)p(t)\exp(wt - t^2)$ auf $\mathbb{R}$ integrierbar sind! Zeigen Sie weiters, dass die Funktion
$$F : z \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(t)\exp(zt - t^2)\, d\lambda(t)$$
auf $\mathbb{C}$ holomorph ist.

   Hinweis: Cauchy-Schwarz für $f \in L^2(\mathbb{R})$.

6. Indem Sie $z \mapsto \exp(zt - t^2)$ in eine Taylorreihe um 0 entwickeln, betimme man die Taylorreihe (also die Taylor-Koeffizienten) von F um 0; vgl. Ende Kapitel 11 Analysis 2.

7. Man berechne das Volumen von $B \subseteq \mathbb{R}^3$, dh. $\lambda_3(B)$, wobei B die Menge aller Vektoren, die über der xy-Ebene, unterhalb des Paraboloids $x^2+y^2-z=0$ und innerhalb des Zylinders $x^2+y^2=a^2$ mit einem festen $a>0$ liegen, ist. Also

$$B = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : z \geq 0\} \cap \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : z \leq x^2+y^2\} \cap \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x^2+y^2 \leq a^2\}.$$

8. Man berechne das Volumen (λ_3-Maß) von $\{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 : |x|+|y|+|z| < 1\}$ und von $\{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 : |a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z| + |a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z| + |a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z| < 1\}$ mit Zahlen $a_{i,j} \in \mathbb{R}$.

9. Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine selbstadjungierte, positiv definite Matrix und $Q(x) = x^T Ax,\ x \in \mathbb{R}^n$. Man berechne

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-Q(x)}\ d\lambda_n(x).$$

Hinweis: Diagonalisierung!