Übungen zu Analysis 3, 9. Übung

1. Seien $a, b, c > 0$. Berechne das Volumen des beschränkten Körpers der von der Fläche

$$F := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{z}{c}\right)^{\frac{2}{3}} = 1\right\}$$

begrenzt wird.
Hinweis: Die durch die Formeln

$$x = ar\sin^3\phi\cos^3\theta,\ y = br\sin^3\phi\sin^3\theta,\ z = cr\cos^3\phi$$

gegebene Koordinatentransformation ist auf einem geeigneten Definitionsbereich ein Diffeomorphismus.

2. Sei M eine 2-dimensionale Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^p$, sei $\phi : D \to M$ eine Einbettung, und $B \in \mathfrak{B}(M)$ mit $B \subseteq \phi(D)$. Zeige

$$\mu(B) = \int_{\phi^{-1}(B)} \sqrt{\|\frac{\partial\phi}{\partial x_1}(s)\|_2^2\,\|\frac{\partial\phi}{\partial x_2}(s)\|_2^2 - \Big(\frac{\partial\phi}{\partial x_1}(s), \frac{\partial\phi}{\partial x_2}(s)\Big)^2}\ d\lambda_2(s)\,,$$

wobei $(.,.)$ das übliche Skalarprodukt im $\mathbb{R}^p$ bezeichnet.

Falls $p = 3$, so zeige man auch, dass

$$\mu(B) = \int_{\phi^{-1}(B)} \|\frac{\partial\phi}{\partial x_1}(s) \times \frac{\partial\phi}{\partial x_2}(s)\|_2\ d\lambda_2(s),$$

wobei $x \times y$ das Kreuzprodukt zweier Dreivektoren ist:

$$x \times y := \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix}.$$

Anmerkung: Gilt der ganz einfache Fall, dass $\phi((\xi_1, \xi_2)^T) = \xi_1 v_1 + \xi_2 v_2$, wobei $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$ linear unabhängig sind, so folgt

$$\|\frac{\partial\phi}{\partial x_1}(s) \times \frac{\partial\phi}{\partial x_2}(s)\|_2 = \|v_1 \times v_2\|_2.$$

Nach elementar-geometrischen Überlegungen ist das gerade die Fläche des von v_1 und v_2 aufgespannten Parallelogramms. Dieses Parallelogramm ist aber gerade $\phi([0, 1] \times [0, 1])$, wobei nach obiger Formel

$$\mu(\phi([0, 1] \times [0, 1])) = \int_{[0,1]\times[0,1]} \|v_1 \times v_2\|_2\ d\lambda_2 = \|v_1 \times v_2\|_2.$$

Also passen unser Oberflächenbegriff und der aus der elementaren Geometrie zusammen.

3. Skizziere die zweidimensionale Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^3$ ($a > 0$, $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$)

$$(x \cos\alpha + y \sin\alpha)^2 + z^2 = a^2 \,.$$

   Berechne die Oberfläche der durch $x, y, z \geq 0$ festgelegten Teilmenge von M.

4. Sei $\psi \in (0, \frac{\pi}{2})$ und sei F die Teilmenge aller Punkte x der Kugeloberfläche S^2 die $x_3 \geq \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \tan\psi$ erfüllen (Kugelkalotte). Skizziere F und berechne die Oberfläche von F.

   Hinweis: Verwende Kugelkoordinaten.

5. Ist B eine messbare Teilmenge einer Mannigfaltigkeit M und μ das Oberflächenmaß auf M, so berechnet sich der Schwerpunkt $(x_S, y_S, z_S)^T \in \mathbb{R}^3$ von B (homogen mit Masse belegten) durch

$$x_S = \frac{1}{\mu(B)} \int_B x \, d\mu(x, y, z)^T, \; y_S = \frac{1}{\mu(B)} \int_B y \, d\mu(x, y, z)^T,$$
$$z_S = \frac{1}{\mu(B)} \int_B z \, d\mu(x, y, z)^T \;.$$

   Bestimmen Sie den Schwerpunkt von $B = M$, wobei M der Graph der Abbildung $f : (0, 1) \times (-1, 1) \to \mathbb{R}, f(x_1, x_2)^T = x_1^2 + x_2$ ist.

6. Bestimmen Sie den Schwerpunkt von $B \subseteq M$, wobei $M = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1\}$ und $B = \phi(R)$, wobei $\phi(s, t)^T = (0, 0, 1)^T + s(1, 0, -1)^T + t(0, 1, -1)^T$ und R die Fläche, die von der x-Achse und einem vollen Bogen der Zykloide $x(t) = a(t - \sin t)$, $y(t) = a(1 - \cos t)$, begrenzt wird.

7. Sei M eine 1-dimensionale Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^p$, und sei $t : M \to \mathbb{R}^p$ stetig, dass $\|t(y)\|_2 = 1$ und $t(y) \in T_y$, d.h. $t(y)$ spannt den T_y für alle $y \in M$ auf. Wir bezeichnen $t(y)$ als stetige und normierte Tangente von M.

   Ist $\phi : (a, b) \to M$ eine Einbettung, so zeige man, dass $\phi'(t) = \pm\|\phi'(t)\|t(\phi(t))$, wobei das Vorzeichen $\pm$ für alle $t \in (a, b)$ das selbe ist.

   Angenommen dieses Vorzeichen ist $+$ und angenommen ϕ lässt sich stetig auf $[a, b]$ fortsetzen, so zeige man, dass für jedes stetige Vektorfeld $F : O \to \mathbb{R}^{1\times p} \simeq L(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})$ mit $O \supseteq \phi([a, b])$ das Wegintegral

$$\int_\phi F(x) \; dx$$

   mit dem Oberflächenintegral

$$\int_{\phi(a,b)} F(y) t(y) \; d\mu(y)$$

   Übereinstimmt.

Schließlich zeige man, dass im Falle $p = 2$ und $M = \partial^o G$ die Funktion $t(y) = Jv(y)$ eine Funktion mit den Eingangs erwähnten Eigenschaften ist. Dabei ist $v(y)$ die Äußere Normale und

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

8. Beweisen Sie, dass für $S^{p-1} := \{x \in \mathbb{R}^p : \|x\|_2 = 1\}$, das entsprechende Oberflächenmaß μ und für jede orthogonale Matrix $T \in \mathbb{R}^{p \times P}$

$$\mu(T(A)) = \mu(A), \quad \text{für alle} \quad A \in \mathfrak{B}(S^{p-1}) \; .$$

9. Sei $S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\|_2 = 1\}$, μ das Oberflächenmaß darauf und sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stetig. Zeigen Sie, dass

$$\int_{S^n} f((x, y)) \; d\mu(y) = \int_{S^n} f(\|x\|_2 \cdot y_{n+1}) \; d\mu(y) \; ,$$

wobei (x, y) das Skalarprodukt von x und y ist. Schließlich zeige man mit Hilfe von Beispiel 16.2.11, dass dieses Integral mit

$$d_{n-1} \int_{-1}^{1} f(\|x\|_2 \cdot t) \; (1 - t^2)^{\frac{n}{2} - 1} \; dt$$

übereinstimmt, wobei d_{n-1} das gesamte Oberflächenmaß von S^{n-1} ist.