Übungen zu Analysis 3, 10. Übung

1. Sei G die Menge aller Vektoren im $\mathbb{R}^2$ mit Länge $< r$ für ein festes $r > 0$. Man bestimme die äußere Normale $v((x,y)^T)$ durch einen Punkt $(x,y)^T \in \partial^o G$, und berechne das Flussintegral
$$\int_{\partial^o G} g((x,y)^T)\ v((x,y)^T)\, d\mu((x,y)^T)$$
direkt und mit Hilfe des Gaußschen Integralsatz. Dabei ist
$$g\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-x^2)y & (1-y^2)x \end{pmatrix}.$$

2. Sei $G = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 < 1,\ -1 < x_3 < 1\}$ und $F : \mathbb{R}^3 \to L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ das Vektorfeld $F((x_1,x_2,x_3)^T) = (2x_1, x_2^2, x_3^2)$. Man gebe $\partial^o G$ an, und zeige, dass für das folgende Flussintegral (siehe unten) gilt
$$\int_{\partial^o G} F(y)v(y)\, d\mu(x) = 4\pi\,.$$
Man berechne dieses Integral direkt und auch mit Hilfe des Gußschen Integralsatzes.

3. Berechnen Sie mit Hilfe des Satzes von Gauß für die Funktion
$$f((x,y,z)^T) = \begin{pmatrix} x^2 \\ -2xy \\ 2z \end{pmatrix}$$
das Flussintegral $\int_{\partial^o G} f((x,y,z)^T)v((x,y,z)^T)\ d\mu((x,y,z)^T)$, wobei $G \subseteq \mathbb{R}^3$ offen und beschränkt so ist, dass sich $\partial^o G = \partial^s G$ aus den den Flächen
$$\begin{aligned} S_1 &: \ x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 4, \quad z > 1, \\ S_2 &: \ (z+5)^2 = 9(x^2+y^2), \quad z \in (-5, 1) \end{aligned}$$
zusammensetzt. Skizze!

4. Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und beschränkt, und seien $\gamma_j : [a_j, b_j] \to \mathbb{C},\ j = 1, \dots, m$, geschlossene, stetige, stückweise stetig differenzierbare Wege, sodass die Abbildungen $\gamma_j|_{(a_j,b_j)\setminus M_j}$ (M_j sind die Unstetigkeitsstellen von γ_j') Einbettungen in den orientierbaren Rand $\partial^o D$ sind und sodass
$$\partial^o D \setminus \dot{\bigcup}_{j=1,\dots,m} \gamma_j\Big((a_j,b_j) \setminus M_j\Big) \quad \text{und} \quad \partial D \setminus \partial^o D$$
endliche Mengen sind – man denke an einen Kreis, einen Kreis mit Loch, ein Dreieck oder ein Rechteck.

   Zeigen Sie, dass für $t \in (a_j, b_j) \setminus M_j,\ j = 1, \dots, m$, die komplexe Zahl $-i\gamma_j'(t)$ interpretiert als Zweivektor normal auf den Tangentialraum $T_{\gamma_j(t)}$ für $\partial^o D$ steht.

Zeigen Sie weiters, dass unter der Annahme, dass $-i\gamma_j'(t)$ interpretiert als Zweivektor immer ins Äußere von D zeigt – also ein positives Vielfache der äußeren Normalen $v(y)$ mit $y = \gamma_j(t)$ ist, für ein stetig differenzierbares $f : G \to \mathbb{C}$ mit $G \supseteq \overline{D}$

$$-i \sum_{j=1}^{m} \int_{\gamma_j} f(z)\ dz$$

interpretiert als Zweivektor mit

$$\int_{\partial^o D} \phi_f(y) v(y)\ d\mu(y)$$

übereinstimmt. Dabei ist μ das Oberflächenmaß von $\partial^o D$ und

$$\phi_f(y) = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} f(z) & -\operatorname{Im} f(z) \\ \operatorname{Im} f(z) & \operatorname{Re} f(z) \end{pmatrix}.$$

Schließlich zeige mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes und mit $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) := \frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y})$, dass

$$\frac{1}{2i} \sum_{j=1}^{m} \int_{\gamma_j} f(z)\ dz = \int_D \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z)\ d\lambda_2(z)\,.$$

Welche Aussage erhält man damit, wenn f holomorph ist?

5. Man betrachte die 2-dimensionale Mannigfaltigkeit M im $\mathbb{R}^3$

$$M := \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in M :\Leftrightarrow z > 0,\ 3x^2 - 4y + 2y^2 + 2z - 3 = 0.$$

Weiters sei G jene offene Teilmenge von $\mathbb{R}^3$, die von M und der xy-Ebene begrenzt wird.

Man bestimme $\partial G, \partial^s G$ und $\partial^o G$, berechne mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes das Flussintegral

$$\int_M v(a)^T F(a)\ d\mu(a),$$

wobei $v(a)$ die äußere Normale auf den Tangentialraum in a von $\partial^o G$ und μ das Oberflächenmaß von $\partial^o G$ ist. Außerdem ist

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(x-2)^3 + \ln(z^2+1) \\ 7z \\ y^2 z + 1 \end{pmatrix}.$$

6. Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $p \in [1, +\infty]$ und $d \in \mathbb{N}$. Mit $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R}^d)$ bezeichnen wir alle komponentenweise messbaren und sogar komponentenweise integrierbare Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{R}^d$. Zeigen Sie, dass $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R}^d)$ versehen mit

$$\|f\| := (\int_{\mathbb{R}^d} \|f(x)\|_p^p\ d\mu(x))^{\frac{1}{p}}$$

ein Banachraum ist. $\|.\|_p$ ist hier die entsprechende Norm auf $\mathbb{R}^d$.

Zeigen Sie auch, dass für $p \in [1 + \infty)$, wobei im Fall $p = 1$ das Maß als σ-endlich vorauszusetzen ist, der Dualraum $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R}^d)$ isometrisch isomorph zu $L^q(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R}^d)$ ist, wobei $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Hinweis: Betrachte $L^p(\Omega \times \{1, \dots, d\}, \mathcal{A} \otimes \mathcal{P}(\{1, \dots, d\}), \mu \otimes \xi, \mathbb{R})$, wobei $\mathcal{P}(\{1, \dots, d\})$ die Potenzmenge auf $\{1, \dots, d\}$ bezeichnet und wobei ξ das Zählmaß darauf ist.

7. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum. Zeigen Sie, dass für $p, q \in [1, +\infty)$ die Menge $L^p \cap L^q$ dicht in L^p bzgl. $\|.\|_p$ ist.

   Ist weiters $\mu(\Omega) < +\infty$, so weise man nach, dass $L^p \subseteq L^q$ für $p, q \in [1, +\infty],\ p \geq q$.

   Schließlich gebe man einen Maßraum an, wo $L^p \supseteq L^q$ für $p, q \in [1, +\infty],\ p \geq q$.

   Hinweis: ℓ^p.

8. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein Hausdorffraum und seien $\mathfrak{B}$ alle Borelteilmengen von X, dh. $\mathfrak{B} = A_\sigma(\mathcal{T})$. Weiters sei $\mu : \mathfrak{B} \to [0, +\infty]$ ein Borelmaß, dh. ein Maß mit $\mu(K) < +\infty$ für alle kompakten $K \subseteq X$, sodass μ bei allen $A \in \mathfrak{B}$ mit $\mu(A) < +\infty$ von innen regular ist, dh. dass $\mu(A) = \sup\{\mu(K) : K \subseteq A, K \text{ kompakt}\}$.

   Zeigen Sie, dass dann die Menge aller Treppenfunktionen der Bauart $\sum_{j=1}^m \alpha_j \cdot \mathbb{1}_{K_j}$, wobei die K_j kompakt sind, dicht in $L^p(X, \mathfrak{B}, \mu)$ ist.

9. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum und $p \in [1, +\infty)$. Weiters sei $\phi \in L^\infty(\Omega, \mathfrak{A}, \mu, \mathbb{C})$. Zeigen Sie, dass

$$M : f \mapsto \phi \cdot f,$$

   ein beschränkter, linearer Operator von L^p in sich ist, wobei die Abbildungsnorm $\|M\|$ von M kleiner oder gleich $\|\phi\|_\infty$ ist.

   Man zeige auch, dass im Falle eines σ-endlichen μ sogar $\|M\| = \|\phi\|_\infty$.

   Hinweis: Um $\|M\| \geq \|\phi\|_\infty$ zu zeigen, betrachte man für ein beliebiges $\epsilon > 0$ die Charakteristische Funktion einer Teilmenge von $\{x \in \Omega : |\phi(x)| > \|\phi\|_\infty - \epsilon\}$ mit endlichem, nicht verschwindenden Maß. Warum gibt es eine solche?

Flussintegral:

Wir betrachten die Strömung einer inkompressiblen Flüssigkeit mit Dichte 1. Diese wird beschrieben durch ein Vektorfeld $V : O \to \mathbb{R}^3$ wobei $V(x)$ die Strömungsgeschwindigkeit an der Stelle x bedeutet. Wir setzen hierbei voraus, dass die betrachtete Strömung stationär ist, d.h. dass die Strömungsgeschwindigkeit nur vom Ort x, nicht aber von der Zeit abhängt.

Es liege nun eine Fläche in der Strömung, und wir fragen uns wieviel Flüssigkeit pro Zeiteinheit von links nach rechts durch diese Fläche hindurchfliesst. Stellt man sich vor die Fläche wäre ein Rechteck und die Strömungsgeschwindigkeit v wäre auf der ganzen Fläche konstant, so wäre der Fluss durch die Fläche gleich $\nu^T V \cdot F$ wobei ν den Normalenvektor an die Fläche bezeichnet der nach rechts zeigt und F die Fläche des Rechtecks ist.

Nunmehr verwundert es nicht, dass man definiert: Sei M eine 2-dimensionale Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^3$ und $V : M \to \mathbb{R}^3$ stetig. Sei vorausgesetzt, dass es eine auf ganz M stetige Normale $\nu(x)$ gibt. Dann heißt $\int_M \nu(x)^T V(x)\, d\mu(x)$, wobei $d\mu$ das Oberflächenmaß von M ist, der *Fluss* des Vektorfeldes V durch M.