

Übungen zur Vorlesung Computermathematik

Serie 2

Aufgabe 2.1. Schreiben Sie eine Funktion, die für einen Vektor $x \in \mathbb{C}^n$ und $1 \leq p < \infty$ die ℓ_p -Norm

$$\|x\|_p := \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p \right)^{1/p}$$

berechnet und zurückgibt. Die Funktion soll auf zwei unterschiedliche Arten programmiert werden: erstens unter Vermeidung von Schleifen und Verwendung geeigneter Vektor-Funktionen und Arithmetik an deren Stelle; zweitens mithilfe von Schleifen und skalarer Arithmetik.

Aufgabe 2.2. Schreiben Sie eine Funktion `cut`, die einen Vektor $x \in \mathbb{R}^N$ und eine Schranke $S \geq 0$ übernimmt und einen Vektor $y \in \mathbb{R}^n$ zurückgibt, aus dem alle Einträge x_j mit $|x_j| > S$ gestrichen werden. Aufruf mit $S = 1$ und $x = (0, 2, 1, 4, 5, 0, 0, 1, 2) \in \mathbb{R}^9$ liefere also $y = (0, 1, 0, 0, 1) \in \mathbb{R}^5$ zurück. Vermeiden Sie Schleifen, und verwenden Sie geeignete Vektor-Funktionen und Arithmetik an deren Stelle.

Aufgabe 2.3. Schreiben Sie eine Funktion `matrix`, die für gegebenes $n \in \mathbb{N}$ die Matrix $A \in \mathbb{N}^{n \times n}$ mit $A_{jk} = j + k$ und die Schachbrett-Matrix $B \in \mathbb{N}^{n \times n}$ mit

$$B_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{falls } j + k \text{ gerade} \\ 0 & \text{falls } j + k \text{ ungerade} \end{cases}$$

zurückgibt. Erzeugen Sie B aus A mithilfe der Funktion `mod`. Vermeiden Sie Schleifen, und verwenden Sie geeignete Vektor-Funktionen und Arithmetik an deren Stelle.

Aufgabe 2.4. Schreiben Sie eine Funktion `dominant`, die für eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ überprüft, ob diese diagonaldominant ist, also, ob

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n |A_{jk}| < |A_{jj}| \quad \text{für alle } j \in \{1, \dots, n\}.$$

Falls A diagonaldominant ist, soll 1 zurückgegeben werden, anderenfalls 0.

Aufgabe 2.5. Das Polynom $p(x) = \sum_{j=0}^n a_j x^j$ sei gegeben in Form seines Koeffizientenvektors $a \in \mathbb{C}^{n+1}$. Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion, die a übernimmt und den Koeffizientenvektor der Ableitung p' zurückgibt. Die Funktion soll auf zwei unterschiedliche Arten programmiert

werden: erstens unter Vermeidung von Schleifen und Verwendung geeigneter Vektor-Funktionen und Arithmetik an deren Stelle; zweitens mithilfe von Schleifen und skalarer Arithmetik. Ihre Funktion soll für Spalten- und Zeilenvektoren a funktionieren und stets einen Spaltenvektor zurückliefern; siehe z.B. `help reshape`

Aufgabe 2.6. Das Polynom $p(x) = \sum_{j=0}^n a_j x^j$ sei gegeben in Form seines Koeffizientenvektors $a \in \mathbb{C}^{n+1}$. Es sei $x = (x_{jk}) \in \mathbb{C}^{M \times N}$ eine Matrix von Auswertungsstellen. Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion, die die Matrix $(p(x_{jk})) \in \mathbb{C}^{M \times N}$ der Auswertungen berechnet und ausgibt. Ihre Funktion soll für Spalten- und Zeilenvektoren a funktionieren. Die Funktion soll auf zwei unterschiedliche Arten programmiert werden. Einmal unter Vermeidung von Schleifen und Verwendung geeigneter Vektor-Funktionen und Arithmetik an deren Stelle, und einmal mithilfe von Schleifen. **Hinweis:** Sie können `reshape` verwenden, um den Fall einer Matrix x auf den eines Vektors zurückzuführen. Beachten Sie bei Ihrer Lösung, dass die Auswertungsstellen komplexwertig sein können.

Aufgabe 2.7. Das Integral $\int_a^b dx$ einer stetigen Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ kann man durch eine sogenannte Quadraturformel

$$\int_a^b f dx \approx \sum_{j=1}^n \omega_j f(x_j)$$

approximieren, wobei man sich einen Vektor $x \in [a, b]^n$ mit $x_1 < \dots < x_n$ vorgibt und die Funktion f (formal = theoretisch) durch ein Polynom $p(x) = \sum_{j=1}^n a_j x^{j-1}$ vom Grad $\leq n-1$ mit $p(x_j) = f(x_j)$ für alle $j = 1, \dots, n$ approximiert. Die Gewichte ω_j lassen sich aus der Forderung berechnen, dass

$$\int_a^b q dx = \sum_{j=1}^n \omega_j q(x_j) \quad \text{für alle Polynome } q \text{ vom Grad } \leq n-1$$

gilt. Dies ist nämlich äquivalent zur Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\frac{b^{k+1}}{k+1} - \frac{a^{k+1}}{k+1} = \int_a^b x^k dx = \sum_{j=1}^n \omega_j x_j^k \quad \text{für alle } k = 0, \dots, n-1.$$

Warum ist das so? Schreiben Sie eine Funktion `integrate`, die den (Zeilen- oder Spalten-) Vektor $x \in [a, b]^n$ und den Funktionswert-Vektor $f(x)$ übernimmt und den approximativen Wert des Integrals zurückgibt. Dazu bauen Sie das lineare Gleichungssystem möglichst effizient auf und lösen dieses mittels Backslash-Operator. Mit Hilfe des Ergebnisvektors $\omega \in \mathbb{R}^n$ ergibt sich das approximative Integral als Skalarprodukt mit dem $f(x)$ -Vektor. Vermeiden Sie Schleifen, und verwenden Sie geeignete Vektor-Funktionen und Arithmetik an deren Stelle.

Aufgabe 2.8. Es sei $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine untere Dreiecksmatrix mit Einträgen $\ell_{jj} \neq 0$ für alle $j = 1, \dots, n$, d.h. L hat die Form

$$L = \begin{pmatrix} \ell_{11} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \ell_{21} & \ell_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \ell_{n-1,1} & \ell_{n-1,2} & \cdots & \ell_{n-1,n-1} & 0 \\ \ell_{n1} & \ell_{n2} & \cdots & \ell_{n,n-1} & \ell_{nn} \end{pmatrix}$$

Wegen $\det(L) = \prod_{j=1}^n \ell_{jj} \neq 0$ ist L dann invertierbar, und die Inverse lässt sich rekursiv wie folgt berechnen: Wir schreiben L in Block-Form

$$L = \begin{pmatrix} L_{11} & 0 \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix}$$

mit $L_{11} \in \mathbb{R}^{p \times p}$, $L_{21} \in \mathbb{R}^{q \times p}$ und $L_{22} \in \mathbb{R}^{q \times q}$, wobei $p + q = n$ gilt. Üblicherweise wählt man $p = n/2$ für gerades n und $p = (n - 1)/2$ für ungerades n . Man beachte, dass L_{11} und L_{22} wieder reguläre untere Dreiecksmatrizen sind. Elementares Nachrechnen zeigt, dass die Inverse die Block-Form

$$L^{-1} = \begin{pmatrix} L_{11}^{-1} & 0 \\ -L_{22}^{-1}L_{21}L_{11}^{-1} & L_{22}^{-1} \end{pmatrix}$$

besitzt. Schreiben Sie eine Funktion `invertL`, die die Inverse L^{-1} auf die beschriebene Weise rekursiv berechnet. Sie können die Korrektheit Ihrer Funktion mithilfe von `imv` überprüfen. Vermeiden Sie Schleifen, und verwenden Sie geeignete Vektor-Funktionen und Arithmetik an deren Stelle.