Serie 2

Besprechung: Woche von Montag, 18.3.2019

2.1. Es soll die Funktion f auf dem Intervall $[a,b]$ durch eine Funktion approximiert, die *stückweise* ein Polynom vom Grad n ist. Gehen Sie wie folgt vor: Zerlegen Sie $[a,b]$ in N Teilintervalle $[t_j,t_{j+1}]$, $j=0,\dots,N-1$, der Länge $h=(b-a)/N$ mit $t_j=a+jh$. In jedem Teilintervall $[t_j,t_{j+1}]$ wählen Sie die Interpolationspunkte $x_{i,j}:=t_j+\frac{1}{n}ih$, $i=0,\dots,n$ und approximieren Sie f auf $[t_j,t_{j+1}]$ durch das Polynom, welches in den Punkten $x_{i,j}$, $i=0,\dots,n$, interpoliert. Auf diese Weise erhalten Sie eine Funktion p, welche auf jedem Teilintervall ein Polynom vom Grade n ist. Zeigen Sie:

$$\|f-p\|_{\infty,[a,b]} \le \frac{1}{(n+1)!}h^{n+1}\|f^{(n+1)}\|_{\infty,[a,b]}.$$

Skizzieren Sie für $n=1$ die Funktion p.

2.2. Für eine Funktion f und einen Punkt x_0 sei

$$D_{sym}(h) := \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$$

der symmetrische Differenzenquotient. Sei $h_i=2^{-i}$, $i=0,\dots$

a) Verwenden Sie Ihr Programm aus Aufg. 1.2, um für $f(x)=\tan(x)$ und $x_0=0$ die ersten 3 Spalten des Nevilleschema für die Extrapolation von $D_{sym}(0)$ zu erhalten. Plotten Sie doppelt logarithmisch (“`loglog`”) den Fehler gegen h für diese 3 Spalten, d.h. für Spalten $m\in\{0,1,2\}$ plotten Sie die Werte $\texttt{abs}(N(:,m)-1)$ gegen $h(:)$. Plotten Sie als “Hilfslinien” die Kurven $h\mapsto h^2$, $h\mapsto h^3$, $h\mapsto h^4$. Welche Konvergenz beobachten Sie?

b) Modifizieren Sie Ihr Programm aus Aufg. 1.2 so, daß nun ausgenutzt wird, daß die Funktion D_{sym} symmetrisch bzgl. $h=0$ ist, d.h. $D_{sym}(h)=\widetilde{D}(h^2)$ für eine Funktion $\widetilde{D}$. Plotten Sie wieder doppelt logarithmisch den Fehler gegen h für diese 3 Spalten. Welche Konvergenz beobachten Sie?

c) Wiederholen Sie die Teilaufgaben a) und b) für die Funktion $f(x)=(\max(x,0))^{3/2}$. Welche Konvergenzen beobachten Sie nun? Erklären Sie.

2.3. (“harmonische Reihe”) Ziel ist die effiziente Approximation von

$$S(N) := \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}$$

für große N. Man kann $S(N)$ darstellen als

$$S(N) = \ln N + a_0 + \frac{a_1}{N} + \frac{a_2}{N^2} + \cdots \tag{1}$$

Bestimmen Sie die Koeffizienten a_0, a_1, a_2 wie folgt: 1) Schreiben Sie eine Funktion zur Auswertung von $S(N)$. 2) Stellen Sie ein lineares Gleichungssystem für die Koeffizienten a_0, a_1, a_2 auf, daß sich durch die Werte für $N=10$, 100, 1000 ergibt. (Die Terme $+\cdots$ in (1) werden einfach weggelassen). 3) Lösen Sie für die Koeffizienten (in `matlab` ist dies die Operation \, in `python` ist dies `numpy.linalg.solve`). Wie groß ist der Fehler der Approximation für $N=10^6$ und $N=10^8$? Was ist die Rechenzeit für die Auswertung von $S(10^8)$ auf Ihrem Rechner (Verwenden Sie `tic`, `toc` bzw. `time.time()`)

2.4. Ziel ist, den Reihenwert $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$ numerisch zu bestimmen. Modifizieren Sie Ihr Vorgehen aus Aufgabe 3, indem Sie die Funktion

$$S'(N) := \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2}$$

einführen und

$$S'(N) = a_0 + \frac{a_1}{N} + \frac{a_2}{N^2} + \cdots$$

approximieren. Verwenden Sie nun $N=100$, 1000, 10000. Wie groß ist der Fehler $a_0-\pi^2/6$?