Serie 3

Besprechung: Woche von Montag, 25.3.2019

3.1. **a)** Betrachten Sie die Funktion $f(x) = (4 - x^2)^{-1}$. Geben Sie eine Abschätzung für $\min_{q\in\mathcal{P}_n} \|f - q\|_{\infty,[-1,1]}$ an, indem Sie mit dem Taylorpolynom von f um einen geeigneten Punkt vergleichen. Plotten Sie semilogarithmisch (`semilogy`) den Fehler $\|f - T_n^{Tsch}\|_{\infty,[-1,1]}$ bei Interpolation in den Tschebyscheffpunkten gegen den Polynomgrad n. Bestimmen Sie dabei $\|f - I_n^{Tsch}\|_{\infty,[-1,1]}$ approximativ, indem Sie den maximalen Interpolationsfehler in 100 gleichmäßig im Intervall $[-1, 1]$ verteilten Punkten betrachten.

3.2. **a)** Zeigen Sie, daß für die Gewichte der Newton-Cotes-Formeln gilt: $\sum_{i=0}^{n} w_i = 1$(= Länge des Intervalls $[0, 1]$) (*Hinweis:* Wenden Sie die Quadraturformel auf eine geeignete Funktion f an.)

b) Zeigen Sie, daß die Quadraturformeln $\widehat{Q}_n^{aNC}$, $\widehat{Q}_n^{oNC}$ der abgeschlossenen und der offenen Newton-Cotes-Formeln exakt sind für $f \in \mathcal{P}_n$.

c) Zeigen Sie die Symmetrieeigenschaft $w_{n-i} = w_i$, $i = 0, \dots, n$. (*Hinweis:* Nutzen Sie die Symmetrie der Punkte, d.h. $x_j = 1/2 - x_{n-j}$.

d) Sei $n = 2m$ gerade. Betrachten Sie die Funktion $f = (x - 1/2)^{n+1}$, welche ungerade bzgl. 1/2 ist. Zeigen Sie: $\int_0^1 f(x)\,dx = 0 = \widehat{Q}_n^{aNC}(f) = \widehat{Q}_n^{oNC}(f)$. Schließen Sie, daß die Quadraturformel exakt ist für Polynome vom Grade $n + 1$. Insbesondere ist die Mittelpunktregel exakt für Polynome in $\mathcal{P}_1$ und die Simpsonregel exakt für Polynome in $\mathcal{P}_3$.

3.3. Schreiben sie ein Programm, das die summierte Trapezregel auf einem Intervall $[a, b]$ und einer Unterteilung in N gleichgroße Teilintervalle der Länge $h = (b-a)/N$ realisiert. Betrachten Sie für $[a, b] = [-1, 1]$ die drei Integranden

$$f_1(x) = x^2, \qquad f_2(x) = |x|, \qquad f_3(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^x & x < 1/3 \\ e^x & x \geq 1/3 \end{cases}$$

Plotten Sie (`loglog`) den Quadraturfehler gegen h für die Wahlen $h = 2^{-i}$, $i = 1, 2, \dots, 20$. Was beobachten Sie? Erklären Sie Ihre Beobachtungen.

3.4. Gegeben seien zwei Basen $\{p_0, \dots, p_n\}$ und $\{q_0, \dots, q_n\}$ des Polynomraumes $\mathcal{P}_n$ sowie Interpolationspunkte x_i, $i = 0, \dots, n$. Definieren Sie die Matrizen $\mathbf{G}$ und $\mathbf{H}$ durch

$$\mathbf{G}_{ij} = p_j(x_i), \qquad \mathbf{H}_{ij} = q_j(x_i).$$

Zeigen Sie, daß die Matrix $\mathbf{G}^{-1}\mathbf{H}$ den Basiswechsel realisiert, d.h. aus

$$\mathbf{c} = \mathbf{G}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{d}$$

folgt $\sum_i \mathbf{c}_i p_i = \sum_i \mathbf{d} q_i$.