Serie 4

Besprechung: Woche von Montag, 1.4.2019

4.1. Seien C, $\alpha > 0$. Betrachte die Funktion $h \mapsto f(h) = Ch^\alpha$. Begründen Sie, warum diese Funktion im `loglog`-Plot eine Gerade ist. Was ist die Steigung der Geraden?

4.2. Es soll gezeigt werden, daß die Extrapolation der summierten Trapezregel die summierte Simpsonregel erzeugt. Hier bezeichne $T(h)$ die summierte Trapezregel mit Schrittweite $h = (b-a)/N$ und $S(h)$ die summierte Simpsonregel mit Schrittweite $h = (b-a)/N$. Wir verwenden Extrapolation mit Schrittweiten $h_i = (b-a)2^{-i}$, $i = 0, 1, \dots,$

a) Die Extrapolation der summierten Trapezregel (mit Schrittweite h) hat in der Spalte $m = 0$ die Werte $T(h_i)$. Zeigen Sie: in der Spalte $m = 1$ des Nevilleschemas sind die Werte gegeben durch

$$N_i := T(h_{i+1}) + \frac{1}{3}(T(h_{i+1}) - T(h_i))$$

b) Zeigen Sie: es ist $N_i = S(h_i)$.

4.3. Programmieren Sie die Rombergextrapolation der summierten Trapezregel für Schrittweiten $h_i = (b-a)2^{-i}$, $i = 0, 1, \dots$, (d.h. sie verwenden Ihr Programm aus Aufg. 3.3 mit $N = 2^i$ und verwenden das Nevilleschema für die Extrapolation). Plotten Sie (`loglog`) den Fehler, der sich in den Spalten $m = 0$, $m = 1$, $m = 2$ des Nevilleschemas ergibt für die Integranden

$$f_1(x) = x^{0.2}, \quad f_2(x) = x^{10}, \quad f_3(x) = x^2$$

und das Integrationsgebiet $[0, 1]$. Was beobachten Sie?

4.4. Schreiben Sie ein Programm mit Signatur $I = \texttt{adapt}(f, a, b, \tau, h_{min})$ welches die adaptive Quadratur für $\int_a^b f(x)\,dx$ realisiert. Die Quadratur soll auf der Simpsonregel basieren. Hier ist τ die gewünschte (absolute) Genauigkeit und h_{min} die minimale zulässige Intervalllänge. Zum Schätzen der Genauigkeit vergleichen Sie den Wert der Simpsonregel $S_{\{a,b\}}(f)$ für die Integration auf $[a, b]$ mit dem Wert $S_{\{a,m\}}(f) + S_{\{m,b\}}(f)$ mit $m = (a+b)/2$. Wenden Sie Ihren Algorithmus für die Integration der Funktion

$$\begin{cases} \frac{1}{2}e^x & x < 1/3 \\ e^x & x \geq 1/3 \end{cases}$$

auf $[0, 1]$ an. Verwenden Sie $\tau = h_{min} = 2^{-j}$, $j = 0, \dots, 10$. Plotten den Fehler gegen τ. Welche Konvergenz beobachten Sie? Warum wurde $h_{min} = \tau$ gewählt?