Serie 7

Besprechung: Woche von Montag, 6.5.2019

7.1. Betrachten Sie die Gaußelimination (Alg. 4.7 des Skriptes). Bestimmen Sie die Anzahl Multiplikationen, die der Algorithmus benötigt. Sie dürfen verwenden, daß

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}, \qquad \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

7.2. Für symmetrisch positiv definite Matrizen $\mathbf{A}$ macht man typischerweise anstelle einer *LU*-Zerlegung eine sog. *Cholesky-Zerlegung*, d.h. man sucht eine untere Dreiecksmatrix[1] $\mathbf{C}$, so daß

$$\mathbf{C}^\top \mathbf{C} = \mathbf{A}$$

Formulieren Sie einen Algorithmus, der $\mathbf{C}$ bestimmt. *Hinweis:* Gehen Sie ähnlich vor wie bei der Bestimmung der *LU*-Zerlegung nach Crout.

7.3. Sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$. Auf dem Raum der $n \times n$-Matrizen wird dann eine Norm $\|\mathbf{A}\|$ definiert durch

$$\max_{0 \neq \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \frac{\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|}.$$

a) Zeigen Sie für beliebige Matrizen $\mathbf{A}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$: $\|\mathbf{A}\mathbf{B}\| \leq \|\mathbf{A}\|\|\mathbf{B}\|$.

b) Zeigen Sie für den Fall der Norm $\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{i=1,\ldots,n} |x_i|$, daß gilt: $\|\mathbf{A}\|_\infty \leq \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$. *Bemerkung:* Tatsächlich gilt $\|\mathbf{A}\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$.

c) Zeigen Sie für den Fall der Norm $\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$, daß gilt: $\|\mathbf{A}\|_1 \leq \max_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$. *Bemerkung:* Tatsächlich gilt $\|\mathbf{A}\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$.

7.4. ("arrowhead matrix") Sei $n = 10$, $\mathbf{e} = (1, 1, \ldots, 1)^\top \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{b} = (1, 0, \ldots, 0)^\top \in \mathbb{R}^n$. Betrachten Sie die Matrix $\mathbf{A} = 10\mathbf{I} + \mathbf{b}\mathbf{e}^\top + \mathbf{e}\mathbf{b}^\top$ sowie die Matrix $\widetilde{\mathbf{A}} := \mathbf{A}(n : -1 : 1, n : -1, 1)$, die aus $\mathbf{A}$ dadurch entsteht, daß die Numerierung der Zeilen und Spalten invertiert wird. Verwenden Sie die Befehle `spy` (`matplotlib.pyplot.spy`) und `lu` (`scipy.linalg.lu`), um die Besetzungsstruktur der Matrizen $\mathbf{A}$, $\widetilde{\mathbf{A}}$ sowie der zugehörigen Faktoren $\mathbf{L}$, $\mathbf{U}$ der *LU*-Zerlegung zu visualisieren. Was beobachten Sie? Welche Variante der Numerierung der Unbekannten ist unter Komplexitätsaspekten zu bevorzugen?

[1] nicht normalisiert, d.h. die Diagonaleinträge müssen *nicht* 1 sein