Serie 9

Besprechung: Woche von Montag, 20.5.2019

9.1. Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit SVD $\mathbf{A} = \mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^\top$. Seien $\sigma_1, \ldots, \sigma_{\min\{m,n\}}$ die Singulärwerte von $\mathbf{A}$ (d.h. die Diagonaleinträge von Σ).

a) Sei r so, daß $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r > \sigma_{r+1} = 0$. Zeigen Sie: r ist der Rang von $\mathbf{A}$.

b) Zeigen Sie: Die Spalten von $\mathbf{U}(:, [1:r])$ bilden eine Orthonormalbasis des Bildes von $\mathbf{A}$.

c) Zeigen Sie: Die Spalten von $\mathbf{V}(:, [r+1:n])$ bilden eine Orthonormalbasis des Kerns von $\mathbf{A}$.

9.2. Programmieren Sie in 1D das Newtonverfahren. Schreiben Sie hierzu eine `Matlab`/`python`-Funktion `newton(x,f,df)`, welche einen Schritt des Verfahrens durchführt. Hier sind f und df *function handles* auf die Funktion f und ihre Ableitung f'. Plotten Sie semilogarithmisch (`semilogy`) den Fehler gegen die Anzahl Newtonschritte für folgende 3 Funktionen:

$$f_1(x) = x^2, \qquad f_2(x) = e^x - 2, \qquad f_3(x) = |x|^{3/2}.$$

Verwenden Sie als Startwert $x_0 = 0.5$. Was beobachten Sie? Welche Voraussetzungen des Beweises für quadratische Konvergenz sind verletzt? Betrachten Sie das Newtonverfahren für

$$f_4(x) = \frac{1}{x} - 1$$

und Startwert $x_0 = 2.1$. Was beobachten Sie?

9.3. Gegeben sei das nichtlineare Gleichungssytem

$$\mathbf{A}x = \mathbf{b} + \varepsilon\mathbf{f}(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Dabei ist

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} (x_1 - x_2)^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \varepsilon = 0.01.$$

a) Formulieren Sie das Newtonverfahren und schreiben Sie ein Programm zur Berechnung der Iterierten $\mathbf{x}_n$, $n = 1, 2, \ldots,$. Startwert $\mathbf{A}\mathbf{x}_0 = \mathbf{b}$.

b) Verwenden Sie folgendes Verfahren mit Startwert $\mathbf{A}\mathbf{x}_0 = \mathbf{b}$: Für $n = 0, 1, \ldots$ wird $\mathbf{x}_{n+1} \in \mathbb{R}^2$ so bestimmt, daß $\mathbf{A}\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{b} + \varepsilon\mathbf{f}(\mathbf{x}_n)$. Schreiben Sie ein Programm zur Berechnung der Iterierten. Indem Sie den letzten Wert des Newtonverfahrens als "exakte Lösung" deklarieren, können Sie den Fehler bestimmen. Plotten Sie den Fehler für beide Verfahren doppelt logarithmisch (Fehler gegen Iterationsindex n).

c) Überlegen Sie sich, wie Sie im Fall des Verfahrens aus b) die Güte der Approximation $\mathbf{x}_n$ abschätzen können (z.B. mittels der Approximieren $\mathbf{x}_n$ und $\mathbf{x}_{n-1}$). Plotten Sie für $n = 1, \ldots, 10$ den tatsächlichen Fehler und den von Ihnen geschätzen Fehler. Was beobachten Sie?