Übungsblatt 3

Diskussion des Blattes: Fr., 28.3.2014

1. Es soll der Spektralsatz für positive, kompakte, selbstadjungierte Operatoren "elementar" bewiesen werden.

Sei $A : X \to X$ ein kompakter, selbstadjungierter linearer Operator auf dem reellen[1] Hilbertraum X. Definieren Sie den Rayleighquotienten $R : X \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ durch

$$R(x) = \frac{(Ax, x)_X}{(x, x)_X}$$

Nehmen Sie weiters an, daß A nichtnegativ ist, d.h. $R(x) \geq 0$ und daß $\sup_x R(x) > 0$. Daß nur dieser Fall von Interesse ist folgt aus folgendem Resultat der Funktionalanalysis (welches Sie unten wieder benötigen) für selbstadjungierte (beschränkte) Operatoren:

$$\|A\|_X = \sup_{x \in X \setminus \{0\}} R(x). \tag{1}$$

a) Zeigen Sie: R ist beschränkt und nimmt sein Maximum an, d.h. es existiert ein x_0 mit $\|x_0\|_X = 1$ so daß $R(x_0) = \sup_y R(y)$.

b) Zeigen Sie: x_0 ist ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $R(x_0)$, d.h.

$$Ax_0 = \mu_0 x_0, \qquad \mu_0 = R(x_0).$$

Hinweis: R ist Gâteau-differenzierbar, und für festes x_0, $v \neq 0$ gilt für die Funktion $\Pi : t \mapsto R(x_0 + tv)$

$$\Pi'(0) = \frac{2}{\|x_0\|_X^2} \left((Ax_0, v)_X - R(x_0)(x_0, v)_X \right).$$

c) Sei $P_0 : X \to \operatorname{span}\{x_0\}$ die orthogonale Projektion, d.h. (beachte: $\|x_0\|_X = 1$) P_0 ist definiert durch $P_0 x = x_0 (x, x_0)_X$. Definieren Sie den abgeschlossenen Unterraum $X_1 := \operatorname{span}\{x_0\}^\perp := \{x \in X \,|\, (x, x_0)_X = 0\}$ und den Operator $A_1 = A - \mu_0 P_0$. Zeigen Sie:

- $A_1|_{X_1} = A|_{X_1}$
- $A_1 : X_1 \to X_1$ (es gilt sogar: $A_1(X) \subset X_1$)
- $A_1 : X_1 \to X_1$ ist kompakt

d) Man das Vorgehen aus a) für den Operator A_1 auf X_1 wiederholen (unter der Annahme $A_1 \neq 0$) und erhält einen Eigenwert μ_1 von A_1 zum Eigenvektor $x_1 \in X_1$. Nach Konstruktion ist $x_1 \perp x_0$. Zeigen Sie:

- x_1 ist Eigenvektor von A zum Eigenwert μ_1.
- $\mu_1 \leq \mu_0$
- $\|A_1\|_X = \mu_1$ (*Hinweis:* (1)).

e) Offensichtlich kann man induktiv eine Folge μ_n, $n \in \mathbb{N}_0$, und eine Folge von Operatoren $A_n = A - \sum_{i=0}^{n-1} \mu_i P_i$ konstruieren mit $\|A_n\|_{X_n} = \|A_n\|_X = \mu_n$. Die Folge μ_n ist monoton fallend (und nichtnegativ). Falls ein $\mu_n = 0$, dann ist offensichtlich $\|A_n\|_X = \mu_n = 0$, d.h. $A = \sum_{i=0}^{n-1} \mu_i P_i$ ein Operator mit endlichem Rang.

[1] die Argumente gehen alle auch für komplexe Hilberträume

Betrachten Sie nun den Fall, daß alle $\mu_n > 0$. Zeigen Sie: $(\mu_n)_n$ ist eine Nullfolge, indem Sie die paarweise Orthogonalität der zugehörigen Eigenvektoren $(x_n)_n$ und die Kompaktheit von A ausnutzen.
Bemerkung: Dieser Aufgabenteil zeigt, daß $A = \sum_{i=0}^{\infty} \mu_i P_i$. Weil $(\mu_n)_n$ eine Nullfolge ist, kann ein Eigenwert nur endliche (geometrische) Vielfachheit haben. Der Aufgabenteil zeigt auch, daß jedes $x \in X$ die Darstellung $x = \sum_{n=0}^{\infty} (x, x_n)_X x_n + a$ hat, wobei $a \in \operatorname{Ker} A$.

2. Betrachten Sie das Eigenwertproblem

$$-\Delta u = \lambda u \quad \text{auf } \Omega, \qquad u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega.$$

a) Zeigen Sie, daß die (optimale) Poincaré-Kontante C_Ω, welche durch

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \qquad \forall u \in H_0^1(\Omega)$$

gegeben ist, gerade $1/\sqrt{\lambda_1}$ ist.

b) Zeigen Sie, daß die Poincaré-Konstante C_Ω monoton im folgenden Sinn ist: Falls $\Omega' \subset \Omega$, dann ist $C_{\Omega'} \leq C_\Omega$. *Hinweis:* Minimumprinzip oder Minimax-Prinzip für Eigenwertprobleme.

c) (**optional**) Können Sie auch die (optimale) Poincaré-Konstante für die 2. Poincarésche Ungleichung

$$\|u - \overline{u}\|_{L^2(\Omega)} \leq C_P \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \qquad \forall u \in H^1(\Omega)$$

durch ein Eigenwertproblem beschreiben? Wie sieht dieses aus?

3. Betrachten Sie die Eigenwertaufgabe

$$-u'' - \lambda c(x) u = 0 \quad \text{auf } (0,1), \qquad u(0) = u(1) = 0. \tag{2}$$

a) Sei $c(x) \equiv 1$. Geben Sie die Eigenwerte λ_k von (2) an.

b) Für $c(x) \equiv 1$ werde die Eigenwertaufgabe (2) mithilfe einer Galerkindiskretisierung mit stückweise linearen Ansatzfunktionen auf uniformen Gittern der Gitterweite $h = 2^{-n}$, $n = 1, \ldots, n_{max}$ mit $n_{max} = 10$ näherungsweise gelöst. Stellen Sie das zugehörige Matrixeigenwertproblem der Form $\mathbf{Au} = \lambda \mathbf{Mu}$ auf. Schreiben Sie ein MATLAB-Programm, das die Konvergenzeigenschaften untersucht. Das EWP $\mathbf{Au} = \lambda \mathbf{Mu}$ kann in MATLAB mittels `eig` gelöst werden. Es sollen 3 Plots erzeugt werden:

- Konvergenz (relativer Fehler gegen Schrittweite h, doppelt logarithmisch) für die 5 kleinsten Eigenwerte.
- Für $h = 2^{-n_{max}}$ tragen Sie die Eigenwerte und die numerischen Approximationen über der Nummer auf, d.h. die Paare (i, λ_i) und $(i, \lambda_{h,i})$ für $i = 1, \ldots, 2^{n_{max}} - 1$.
- Für $h = 2^{-n_{max}}$ die Paare $(i, (\lambda_{h,i} - \lambda_i)/\lambda_i)$, $i = 1, \ldots, 2^{n_{max}} - 1$ semilogarithmisch.

c) Sei nun $c(x) = 1 + x(1-x)$. Modifizieren Sie Ihr Programm so, daß es auch diesen Fall bearbeiten kann[2].
Die exakten Eigenwerte λ_i sind dann nicht bekannt. Überlegen Sie sich anhand der Aussage, daß

$$\lambda_i = \lambda_{h,i} + ch^2 + O(h^3),$$

wie Sie einen "exakten" Wert aus den letzten beiden Approximationen (d.h. zu den Schrittweiten $h_{min} = 2^{-n_{max}}$ und $2h_{min}$) extrapolieren können. Machen Sie eine Konvergenzstudie wie in Teilaufgabe b) für den kleinsten Eigenwert λ_1, indem Sie Ihren extrapolierten Wert als exakten Wert annehmen.

[2] oder berechnen Sie gleich in Teilaufg. b) die Matrix $\mathbf{M}$ mittels eine Gaußquadratur mit 3 Punkten—die Routine `gauleg.m` finden Sie auf der homepage