Übungsblatt 4

Diskussion des Blattes: Fr., 4.4.2014

1. In der VO haben wir das Minimum-Maximum-Prinzip kennengelernt. Zeigen Sie folgendes "Maximum-Minimum-Prinzip" (mit der Notation $V_m^\perp$ aus der VO):

$$\lambda_m = \min_{v \in V_{m-1}^\perp} R(v) = \max_{z_1,\ldots,z_{m-1} \in V} \min_{\substack{v \in V \\ a(v,z_i)=0,\ i=1,\ldots,m-1}} R(v)$$

2. Betrachten Sie wieder das Laplace-Eigenwertproblem

$$-\Delta u = \lambda u \quad \text{in } \Omega, \qquad u|_{\partial\Omega} = 0.$$

In Aufg. 3.3 haben wir gesehen, daß bei *glatten* Eigenfunktionen und $S_0^{1,1}$-Diskretisierung eine Konvergenz $O(h^2)$ erzielt werden kann. Wir betrachten nun die Konvergenz für das Einheitsquadrat S und das L-Gebiet $L = (0,1)^2 \setminus [0,1/2]^2$. Um das Programmieren einfach zu halten, vervollständigen Sie die in MATLAB vorgefertigte Routine (siehe homepage). Strikt genommen wird dabei nicht eine FEM-Diskretisierung sondern eine Finite-Differenzen-Diskretisierung verwendet, aber die Unterschiede sind relativ klein.

- **a)** Überlegen Sie sich, wie Sie einen genaueren Wert für den kleinsten Eigenwert extrapolieren können.
- **b)** Verwenden Sie Ihren extrapolierten Wert $\lambda_{extrapol}$ als "exakten" Wert und schätzen Sie die erhaltene Konvergenzrate, indem Sie den Fehler $|\lambda_{extrapol} - \lambda_h|$ an ein Gesetz der Form $|\lambda_{extrapol} - \lambda_h| = Ch^\alpha$ fitten.
- **c)** Welche Konvergenzrate würden Sie bei Einsatz von $S_0^{1,1}(\mathcal{T})$ für die beiden Geometrien erwarten?

3. Sei $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{N\times N}$ eine SPD Matrix mit Spektrum $\sigma(\mathbf{B})$ und $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$, $\lambda > 0$ beliebig. Zeigen Sie:

$$\frac{\|\mathbf{r}(\mathbf{x})\|_{\ell^2}}{\|\mathbf{x}\|_{\ell^2}} \geq \min_{\mu \in \sigma(\mathbf{B})} |\mu - \lambda|, \qquad \mathbf{r}(\mathbf{x}) := \mathbf{B}\mathbf{x} - \lambda\mathbf{x}$$

Bemerkung: Falls λ in der Nähe eines einfachen EW ist, dann ist die obige Abschätzung nicht scharf. Es ist dann $\min_\mu |\lambda - \mu| \leq C\|\mathbf{r}\|_{\ell^2}^2$.

4. Seien $\mathbf{A}$ und $\mathbf{M}$ die Steifigkeitsmatrix und die Massematrix, die bei Diskretisierung der folgenden Eigenwertaufgabe entsteht:

$$-\Delta u = \lambda u \quad \text{in } \Omega, \qquad u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \tag{1}$$

mittels $V_h = S_0^{1,1}(\mathcal{T})$. Hier ist $\mathcal{T}$ eine quasi-uniforme Triangulierung mit Maschenweite h.

- **a)** Formulieren Sie die inverse Iteration, um den kleinsten Eigenwert des EWP

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{M}\mathbf{u} \tag{2}$$

zu bestimmen. Welche Konvergenzrate erwarten Sie für die Iteration? (Sie dürfen annehmen, daß der kleinste Eigenwert λ_1 des kontinuierlichen Problems einfach ist—das ist immer so für EWP (1)).

b) Sei $\mathbf{u}_\ell$ eine Approximation an den Eigenvektor und $R(\mathbf{u}_\ell)$ der entsprechende Rayleighquotient (z.B. könnte $\mathbf{u}_\ell$ durch die obige Vektoriteration entstanden sein). Sei $\sigma(\mathbf{A}, \mathbf{M})$ das Spektrum des Eigenwertproblems (2). Zeigen Sie, daß für den Fehler gilt:

$$\min_{\mu \in \sigma(\mathbf{A},\mathbf{M})} |\mu - R(\mathbf{u}_\ell)| \leq \frac{\|\mathbf{r}(\mathbf{u}_\ell)\|_{\mathbf{M}^{-1}}}{\|\mathbf{u}_\ell\|_{\mathbf{M}}} \qquad \mathbf{r}\mathbf{u}_\ell := \mathbf{A}\mathbf{u}_\ell - R(\mathbf{u}_\ell)\mathbf{M}\mathbf{u}_\ell.$$

Hier ist für eine SPD-Matrix $\mathbf{Z}$ die Norm $\|\cdot\|_{\mathbf{Z}}$ definiert durch $\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{Z}}^2 = (\mathbf{Z}\mathbf{x}, \mathbf{x})_{\ell^2}$.

5. Betrachten Sie das EWP

$$a(u, v) - \lambda(u, v)_H = 0 \qquad \forall v \in V$$

mit der Diskretisierung für $V_h \subset V$. Definieren Sie den Fehler $e := u - u_h$ und das Residuum

$$v \mapsto \mathrm{Res}(v) := a(u_h, v) - \lambda_h(u_h, v)_H$$

als lineares Funktional auf V und nehmen Sie die Normierungen $\|u\|_H = \|u_h\|_H = 1$ an.

a) Zeigen Sie: $a(e, e) = \lambda(e, e)_H + \lambda_h - \lambda$

b) Zeigen Sie: $a(e, e) = \frac{\lambda+\lambda_h}{2}(e, e)_H + \mathrm{Res}(e)$

c) **Betrachten Sie nun (1).** Überlegen Sie sich, wie man mit den Techniken von Residualfehlerschätzern einen berechenbaren Ausdruck η definieren kann, so daß die folgende Abschätzung gilt:

$$|\mathrm{Res}(e)| \leq C\eta\|e\|_V.$$

Bemerkung: Da man mittels des Aubin-Nitsche-Tricks zeigen zeigen kann, daß für hinreichend kleine Maschenweiten h die Abschätzung $\|e\|_H \ll \|e\|_V$ gilt, hat man somit einen Fehlerschätzer der Form

$$\|e\|_V \leq C\eta$$

hergeleitet. Daraus ergibt sich dann auch relativ einfach ein Fehlerschätzer für den Eigenwert $|\lambda - \lambda_h|$ von der Form $|\lambda - \lambda_h| \leq C\eta^2$.