Übungsblatt 6

Diskussion des Blattes: Fr., 2.5.2014

1. Betrachten Sie das ODE-System

$$(u', v)_{L^2} + a(u, v) = (f(t), v)_{L^2} \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

wobei a nur eine Gårding–Ungleichung erfüllt: $a(v, v) \geq \|v\|^2_{H^1(\Omega)} - C\|v\|^2_{L^2(\Omega)}$ für alle $v \in H_0^1(\Omega)$. Zeigen Sie, daß mit der Substitution $u(t) = e^{\lambda t}\widetilde{u}(t)$ für geeignetes $\lambda \in \mathbb{R}$ auch in diesem Fall eine Energieabschätzung wie in Satz 9.1 der VO erhalten kann. In Satz 9.1 nahm der Einfluß der Anfangsdaten mit wachsendem t ab. Ist das auch hier der Fall?

2. Sei $a(\cdot, \cdot)$ eine Bilinearform mit $\gamma\|v\|^2_{H^1(\Omega)} \leq a(v, v)$ für alle $v \in H_0^1(\Omega)$. Das θ-Schema ist gegeben durch

$$\frac{1}{k}(u_h^{n+1} - u_h^n, v)_{L^2(\Omega)} + a(u_h^{n+\theta}, v) = (f(t_{n+\theta}), v)_{L^2(\Omega)} \qquad \forall v \in V_h,$$

wobei $u_h^{n+\theta} = \theta u_h^{n+1} + (1-\theta)u_h^n$ und $t_{n+\theta} = \theta t_{n+1} + (1-\theta)t_n$. Zeigen Sie folgende Stabiliätsaussage für $\theta \in [1/2, 1]$:

$$\|u_h^n\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=0}^{n-1} k\gamma\|u_h^{i+\theta}\|^2_{H^1(\Omega)} + (2\theta - 1)\|u_h^{i+1} - u_h^i\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \|u_h^0\|^2_{L^2(\Omega)} + C\sum_{i=0}^{n-1} k\|f(t_{i+\theta})\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

3. Wir betrachten ODEs

$$y' = f(t, y)$$

welche in einem Skalarprodukt $\langle\cdot, \cdot\rangle$ die Bedingung

$$\langle f(t, u), u\rangle \leq 0 \qquad \forall (t, u) \tag{1}$$

erfüllen. Man überlegt sich leicht, daß mit der durch $\langle\cdot, \cdot\rangle$ erzeugten Norm $\|\cdot\|$ Lösungen der ODE $y' = f(t, y)$ die Abklingbedingung

$$\|y(t)\|^2 \leq \|y(0)\|^2 \qquad \forall t > 0$$

erfüllen. Ziel eines numerischen Verfahren sollte sein, dieses qualitative Verhalten ins Diskrete zu vererben.[1]

Wir betrachten ein s-stufiges Runge-Kutta-Verfahren (RK-Verfahren). Zu gegebenem $b \in \mathbb{R}^s$, $c \in [0, 1]^s$ und $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{s\times s}$ ist ein Schritt der Länge $k > 0$ des RK-Verfahrens gegeben durch folgende Vorschrift (wir beschreiben nur, wie die Approximation y^1 an $y(t_1)$ aus y^0 entsteht):

1. Definiere die Stufen Y_j, $j = 1, \ldots, s$, als Lösung des (nichtlinearen) Gleichungssystems

$$Y_i = y^0 + k\sum_{j=1}^{s} \mathbf{A}_{ij}F_j, \qquad F_j = f(t_0 + c_jk, Y_j), \qquad i = 1, \ldots, s.$$

2. Die Approximation y^1 ist dann $y^1 = y^0 + k\sum_{j=1}^{s} b_jF_j$.

Ein RK-Verfahren heißt *algebraisch stabil*, falls

- $b_j > 0 \quad j = 1, \ldots, s$
- die symmetrische Matrix $\mathbf{M} := (\operatorname{diag} b)\mathbf{A} + \mathbf{A}^\top(\operatorname{diag} b) - bb^\top$ positiv semidefinit ist

Ziel der Aufgabe ist zu zeigen, daß für algebraisch stabile Verfahren folgende Abschätzung gilt:

$$\|y^1\|^2 \leq \|y^0\|^2. \tag{2}$$

[1] Solche Verfahren heißen BN-stabil. In dieser Übung zeigen wir, daß *algebraisch stabile* Verfahren BN-stabil sind. Wichtige Vertreter dieser Verfahrensklasse sind die Gauß- und die Radau IIA-Verfahren.

Genauer:

$$\|y^1\|^2 - \|y^0\|^2 = 2k \sum_{i=1}^{s} b_i \langle Y_i, F_i \rangle - k^2 \sum_{i,j=1}^{s} \mathbf{M}_{ij} \langle F_i, F_j \rangle. \tag{3}$$

a) Überlegen Sie sich, daß die Matrix $\mathbf{M}$ (Einträge: $\mathbf{M}_{ij} = b_i \mathbf{A}_{ij} + \mathbf{A}_{ji} b_j - b_i b_j$) folgende Darstellung hat:

$$\mathbf{M} = \sum_{\ell=1}^{s} \mu_\ell \mu_\ell^\top, \qquad \mu_\ell \in \mathbb{R}^s.$$

b) Überlegen Sie sich, daß für beliebiges $\xi \in \mathbb{R}^s$ gilt: $\xi^\top \mathbf{M} \xi = \sum_{\ell=1}^{s} (\mu_\ell^\top \xi)^2$.

c) Überlegen Sie sich, daß für beliebige U_i, $i = 1, \ldots, s$ gilt:

$$\sum_{i,j=1}^{s} \mathbf{M}_{ij} \langle U_i, U_j \rangle = \sum_{\ell=1}^{s} \| \sum_{i=1}^{s} \mu_{\ell,i} U_i \|^2.$$

d) Zeigen Sie die Beziehungen

$$\langle Y_i, F_i \rangle = \langle y^0, F_i \rangle + k \sum_{j=1}^{s} \mathbf{A}_{ij} \langle F_i, F_j \rangle, \qquad \langle Y_i, F_i \rangle = \langle y^1, F_i \rangle + k \sum_{j=1}^{s} (\mathbf{A}_{ij} - b_j) \langle F_i, F_j \rangle$$

und schließen Sie

$$2k \sum_{i=1}^{s} b_i \langle Y_i, F_i \rangle = \langle y^1 + y^0, k \sum_{i=1}^{s} b_i F_i \rangle + k^2 \sum_{i,j=1}^{s} (2 b_i \mathbf{A}_{ij} - b_i b_j) \langle F_i, F_j \rangle.$$

e) Zeigen Sie (3) und damit (2).

4. Eine Alternative zu RK-Verfahren sind BDF-Verfahren. Als Mehrschrittverfahren bieten sie den Vorteil, Verfahren höherer Ordnung zu liefern, ohne die Größe des zu lösenden Gleichungssystems aufzublasen. Das BDF2 ist definiert durch folgende Rekursion (wenn y_i und y_{i-1} gegeben sind):

$$3y_{i+1} - 4y_i + y_{i-1} = 2k f_{i+1}.$$

a) Formulieren Sie das BDF2-Verfahren für die Wärmeleitungsgleichung mit FEM als Ortsdiskretisierung.

b) Programmieren Sie das BDF2-Verfahren für das Problem aus Aufg. 5.4. Untersuchen Sie die Konvergenzordnung der Zeitdiskretisierung, indem Sie genau wie in Aufg. 5.4 den L^2-artigen Fehler bei $T = 1$ betrachten. Wählen Sie Zeitschritte $k = 2^{-n}$, $n = 3, \ldots, n_{max} - 2$ mit $n_{max} = 10$. Wählen Sie als Ortsdiskretisierung fix $h = 2^{-n_{max}}$.
Das BDF2-Verfahren benötigt noch einen zweiten Startwert bei $t_1 = k$. Bestimmen Sie diesen durch *einen* Schritt des impliziten Eulerverfahrens. Welche Konvergenzrate (Fehler gegen k) beobachten Sie? Alternativ bestimmen Sie diesen durch *einen* Schritt des expliziten Eulerverfahrens. Welche Konvergenzrate beobachten Sie?

c) (optional) Wiederholen Sie b) für das BDF3-Verfahren, welches wie folgt gegeben ist:

$$11y_{i+1} - 18y_i + 9y_{i-1} - 2y_{i-2} = 6k f_{i+1}.$$

Die Bestimmung der benötigten Startwerte bei $t_1 = k$ und $t_2 = 2k$ kann mittels des Crank-Nicholson-Verfahrens erfolgen. Alternativ kann man das implizite Eulerverfahren verwenden. Was beobachten Sie?