Übungen zu Analysis 2, 2. Übung

1. Man beweise, dass die Funktionen $f(x) = e^x$, $g(x) = x^2$ auf ganz $\mathbb{R}$ konvex sind. Weiters zeige man, dass $\ln x$ auf $\mathbb{R}^+$ konkav ist.

2. Sei f eine konvexe Funktion auf einem Intervall I. Man beweise mit vollständiger Induktion nach $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, dass folgende Ungleichungen gelten (Jensensche Ungleichung):

   Für beliebige $x_1, \dots, x_n \in I$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in [0, 1]$ mit $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$ gilt

   $$f(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j) \leq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f(x_j).$$

   Für beliebige $x_1, \dots, x_n \in I$ und $\mu_1, \dots, \mu_n \in [0, +\infty)$, wobei nicht alle Null sein dürfen, gilt

   $$f\left(\frac{\sum_{j=1}^n \mu_j x_j}{\sum_{j=1}^n \mu_j}\right) \leq \frac{\sum_{j=1}^n \mu_j f(x_j)}{\sum_{j=1}^n \mu_j}.$$

   Man zeige damit: Für $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ und $a_1, \dots, a_n, \lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$ mit $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$ gilt

   $$a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2} \dots a_n^{\lambda_n} \leq a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2 + \dots + a_n\lambda_n.$$

   Hinweis: $f(x) = e^x$!

3. Man bestimme die unbestimmten Integrale

   $$\int (x^3 + 2x^2 - 3)e^{2x-4} \text{ und } \int x^3 \exp(wx),$$

   wobei $w \in \mathbb{C}$ beliebig aber fest ist.

4. Man berechne die unbestimmten Integrale

   $$\int \frac{e^{2x} - 1}{e^x + 2} \text{ und } \int x^2 \sin x.$$

   Hinweis: Hat man eine Funktion f der Gestalt $f(x) = R(e^x)$ wobei R eine rationale Funktion ist, so kann man deren Integral stets mit Hilfe der Substitution $t = e^x$ auf das Integral einer rationalen Funktion bringen.

5. Man berechne folgende Integrale:

   $$\int_{-1}^{0} \frac{x}{x^2 - 3x + 2}\, dx, \quad \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} \frac{x + 1}{x^4 - x}\, dx\ .$$

6. Man berechne durch geeignte Substitutionen folgende Integrale:

   $$\int_{-4}^{1} 5\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\, dx, \quad \int_{1}^{5} \frac{x - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x}}\, dx\ .$$

7. Man berechne folgende Integrale:

$$\int_5^9 \frac{x^3}{4x-1} dx, \quad \int_{-3}^{-2} \frac{1}{x^2-1} dx.$$

8. Zeigen Sie mit Hilfe der Integralrechnung (Ober-, Unter-, Riemannsummen), dass

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^k + 2^k + \ldots + n^k}{n^{k+1}} = \frac{1}{k+1} \qquad (k, n \in \mathbb{N}).$$

Hinweis: $\frac{x^{k+1}}{k+1}$ ist eine Stammfunktion von x^k und es gilt $\int_a^b f(x)\ dx = F(b) - F(a)$, wenn F eine Stammfunktion von f ist.

9. Für $m, n \in \mathbb{Z}$ berechnen Sie

$$\int_0^{2\pi} \exp(int) \cdot \exp(imt)\ dt$$

sowie

$$\int_0^{2\pi} \sin(nt) \cdot \sin(mt)\ dt, \quad \int_0^{2\pi} \cos(nt) \cdot \cos(mt)\ dt, \quad \int_0^{2\pi} \sin(nt) \cdot \cos(mt)\ dt.$$

Hinweis: Es gilt $\int_a^b f(x)\ dx = F(b) - F(a)$, wenn F eine Stammfunktion von f ist. Unterscheiden Sie dabei den Fall $m = n$ und $m \neq n$. Um Rechenarbeit zu sparen, kann man die letzten drei Integrale auf das erste zurück führen.

10. Sei $f(x)$ eine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Funktion. Wir nehmen an, dass $f(x)$ stetig und 1-periodisch ist. Das bedeutet: $f(x) = f(x+1)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Man zeige, dass $f(x)$ auf $\mathbb{R}$ beschränkt ist. Weiters beweise man, dass für beliebiges $\alpha \in \mathbb{R}$ folgende Gleichheit gilt:

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_\alpha^{\alpha+1} f(x)dx.$$