Übungen zu Analysis 2, 3. Übung

1. Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ und bezeichne $\mathfrak{R}$ die Menge aller Riemannzerlegungen von $[a, b]$ gerichtet durch die Feinheit. Zeigen Sie, dass dann $\mathfrak{R}$ Teilfolgen gestattet, und dass für ein Netz $(f(\mathcal{R}))_{\mathcal{R}\in\mathfrak{R}}$ mit Werten in einem metrischen Raum folgende Aussagen äquivalent sind:

$$\lim_{\mathcal{R}\in\mathfrak{R}} f(\mathcal{R}) = y, \text{ dh. } \forall\epsilon > 0\ \exists\mathcal{R}_0 \in \mathfrak{R} : \forall\mathcal{R} \succeq \mathcal{R}_0 \Rightarrow d(f(\mathcal{R}), y) < \epsilon\ .$$

$$\forall\epsilon > 0\ \exists\delta > 0 : \forall|\mathcal{R}| < \delta \Rightarrow d(f(\mathcal{R}), y) < \epsilon\ .$$

$$\forall(\mathcal{R}_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ mit } \lim_{n\to\infty} |\mathcal{R}_n| = 0 \text{ gilt } \lim_{n\to\infty} f(\mathcal{R}_n) = y$$

2. Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ und $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ stetig. Weiters bezeichne $\mathfrak{R}$ die Menge aller Riemannzerlegungen von $[a, b]$ gerichtet durch die Feinheit. Zu jedem $\mathcal{R} = ((\xi_j)_{j=0}^{n(\mathcal{R})}, (\alpha_j)_{j=1}^{n(\mathcal{R})}) \in \mathfrak{R}$ sei $F(\mathcal{R})$ die Funktion auf $[a, b]$ definiert durch

$$F(\mathcal{R})(x) = f(\alpha_j),$$

wenn $x \in [\xi_{j-1}, \xi_j)$, und $F(\mathcal{R})(b) = f(\alpha_{n(\mathcal{R})})$.

Man zeige, dass dann $\lim_{\mathcal{R}\in\mathfrak{R}} F(\mathcal{R}) = f$ und zwar in $\mathcal{B}([a, b], \mathbb{C})$ bezüglich der Metrik d_∞, also gleichmäßig.

3. Sei $f(x)$, $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ die Funktion aus dem ersten Beispiel aus der ersten Übung. Man betrachte für $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$,

$$g(x) = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)} - f(x),$$

und zeige, dass diese Funktion auf $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ wohldefiniert und stetig ist. Weiters zeige man, dass g eine stetige Fortsetzung auf $\mathbb{R}$ hat, welche 1-periodisch ist. Man bezeichne auch die Fortsetzung mit g.

Weiters zeige man, dass g folgende Gleichung erfüllt:

$$g\left(\frac{x}{2}\right) + g\left(\frac{x+1}{2}\right) = 4g(x),$$

und leite daraus ab, dass $g(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$ bzw. $f(x) = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)}$, $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$.

Hinweis zu $g = 0$: Wende diese Funktionalgleichung auf x_{max} an, wobei x_{max} Maxiumum von $|g|$ ist.

4. Man berechne

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\sin x + \tan x}{1 + \cos x}\, dx.$$

5. Man berechne das uneigentliches Integral $\int_0^{+\infty} (t^2 + 2t) \exp(wt) \sin t\, dt$ mit $w \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} w < 0$.

6. Sind folgende uneigentlichen Integrale absolut konvergent oder nicht?

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)\ dx, \quad \int_0^1 \frac{\ln x}{e^{2x} - e^x}\ dx, \quad \int_0^{+\infty} \frac{x \ln x}{(x^2+1)^3}\ dx.$$

Hinweis zur Divergenz: Wenn ein uneigentliches Integral $\int_a^b |f(x)|\ dx$ divergiert, und wenn $|g(x)| \geq |f(x)|$, dann divergiert auch $\int_a^b |g(x)|\ dx$ (Divergente Minorante).

7. Welche folgender Integrale sind eigentliche bzw. uneigentliche Riemann-Integrale? Weiters berechne man diese ($r > 0$):

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{9x - 4x^2}} dx, \quad \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2} dx, \quad \int_1^3 \frac{\sqrt{x^2+4x+5}}{2 + x + \sqrt{x^2+4x+5}} dx.$$

Hinweis: Zum letzten Integral: Substituieren Sie zuerst so, dass $x^2 + 4x + 5 = (x+2)^2 + 1 = t^2 + 1$.

8. Man berechne

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (t^2 - 2t + 2) \exp(-|t| \cdot (2 + i\pi))\ dt.$$

Weiters betrachte man den Betrag $f(x)$ des Integranden als Funktion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Man bestimme lokal und globale Extrema, $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)$. Wo ist f monton wachsend, fallend, wo konvex und wo konkav?

9. Sei $f(x)$ auf $[0,n]$ stetig differenzierbar. Man zeige durch eine Zerlegung von $\int_0^n$ in $\sum_{j=1}^n \int_{j-1}^j$ und unter Verwendung der partiellen Integration, dass sich die Differenz von $\sum_{k=1}^n f(k)$ und $\int_0^n f(x)dx$ berechnen lässt durch

$$\sum_{k=1}^n f(k) - \int_0^n f(x)dx = \int_0^n (x - [x]) f'(x) dx.$$

Außerdem zeige man:

$$\sum_{k=0}^n f(k) = \int_0^n f(x)dx + \frac{f(0) + f(n)}{2} + \int_0^n (x - [x] - \frac{1}{2}) f'(x) dx.$$

10. Man zeige, dass der Limes

$$\gamma := \lim_{n\to\infty} \left[\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right]$$

existiert. Die Zahl γ wird Euler-Mascharonische Konstante genannt; ihr ungefährer Wert ist $0,577215...$.