Übungen zu Analysis 2, 5. Übung

1. Sei $f(x)$ auf $[0,n]$ zweimal stetig differenzierbar. Man zeige, dass sich die Differenz von $\sum_{k=1}^{n} f(k)$ und $\int_0^n f(x)dx$ berechnen lässt durch
$$\sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_0^n f(x)dx = \frac{f(n)-f(0)}{2} - \int_0^n \phi(x)f''(x)dx,$$
wobei $\phi(x) = \frac{(x-[x])^2-(x-[x])}{2}$.

2. Man wende voriges Beispiel auf $f(x) = \ln(x+1)$ an, und zeige, dass das uneigentliche Integral
$$a := -\int_0^\infty \phi(x)f''(x)dx + 1$$
existiert. Man zeige weiters, dass
$$a = \lim_{n\to\infty} \ln((n+1)!)-(n+\frac{3}{2})\ln(n+1)+n+1 = \lim_{n\to\infty} \ln(n!)-(n+\frac{1}{2})\ln n+n$$

3. Man zeige, dass für den Grenzwert a aus dem letzten Beispiel
$$e^a = \lim_{n\to\infty} \frac{n!e^n}{n^n\sqrt{n}}$$
gilt. Man setze $b := e^a$, und zeige weiters, dass $b = \sqrt{2\pi}$.
Hinweis: Man zeige mit Hilfe des Wallischen Produkts
$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_{2n}}{b_n^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}},$$
wobei $b_n = \frac{n!e^n}{n^n\sqrt{n}}$. Man verwende dabei auch die Tatsache, dass
$$\frac{\binom{2k}{k}}{2^{2k}} = \frac{1\cdot 3\ldots(2k-1)}{2\cdot 4\ldots(2k)}.$$
Bemerkung: Als Resultat dieses Beispiels erhält man die Stirlingsche Formel:
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!e^n}{n^n\sqrt{2\pi n}} = 1.$$
Es gilt somit die assymptotische Gleichung $n! \cong n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$.

4. Man beweise die Höldersche Ungleichung mit Hilfe des Beispiel zwei aus der zweiten Übung:
Sei $p \in \mathbb{R},\ p > 1$ und sei $q = \frac{p}{p-1}$. Weiters seien $a_j, b_j \in [0,+\infty),\ j = 1,\ldots,n$. Dann gilt
$$\sum_{j=1}^{n} a_j b_j \leq \left(\sum_{j=1}^{n} a_j^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=1}^{n} b_j^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Hinweis: Man beweise Die Ungleichung zuerst unter der zusätzlichen Voraussetzung, dass $b_j > 0,\ j = 1, \dots, n$. Dazu wende man das erwähntes Beispiel auf die Funktion x^p und $I = [0, +\infty)$ an, und setze $\mu_j = b_j^q$ sowie $x_j = \frac{a_j}{b_j^{q-1}}$.

5. Für $p \geq 1$ sei $\|.\|_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\|(x_j)_{j=1}^n\|_p := \sqrt[p]{\sum_{j=1}^n |x_j|^p}.$$

   Man zeige, dass $\|.\|_p$ eine Norm ist.

   Hinweis: Es gilt $\sum_j |x_j + y_j|^p \leq \sum_j |x_j||x_j + y_j|^{p-1} + \sum_j |y_j||x_j + y_j|^{p-1}$. Nun wende man die Höldersche Ungleichung an, ...

6. Man zeige, dass alle Normen $\|.\|_p,\ p \in [1, \infty]$ auf $\mathbb{R}^n$ äquivalent sind. Man zeige insbesondere, dass $(1 \leq p < q < \infty)$

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_q \leq \|x\|_p \leq n\|x\|_\infty$$

   Hinweis: Man verwende, dass aus $0 < p < q$ und $\lambda \in [0, 1]$ folgt, dass $\lambda^q \leq \lambda^p$.

7. An welchen Punkten des Definitionsbereiches sind die Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ und $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig, und warum bzw. warum nicht?

$$f(u, v) = \begin{pmatrix} e^{-u} \\ e^v \\ \sin(uv) \end{pmatrix},$$

$$g(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^4},\ (x, y) \neq (0, 0), \quad f(0, 0) = 0.$$

8. Man betrachte den Banachraum l^∞ aller beschränkten, komplexwertigen Folgen versehen mit der Norm $\|.\|_\infty$; also $\|(z_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |z_n|$.

   Zeigen Sie, dass die Menge c_0 aller komplexwertigen Nullfolgen ein abgeschlossener Unterraum von l^∞ ist.

   Weiters bestimme man den Abschluss $c(F)$ von F in dem Banachraum l^∞, wobei

$$F = \{(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^\infty : \exists N \in \mathbb{N},\ z_n = 0 \ \text{ für alle } \ n \geq N\}.$$

   Anmerkung: Wegen $F \neq c(F)$ ist das ein Teilraum eines Banachraumes, der nicht abgeschlossen ist.

9. Seien $A_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $A_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ und $A_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ in Matrixdarstellung gegeben durch

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

   wobei die Ausgangsräume der Abbildungen mit $\|.\|_\infty$ und die Zielräume mit $\|.\|_1$ versehen sind. Berechnen Sie die Abbildungsnormen von A_1, A_2, A_3

10. Sei $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ eine Diagonalmatrix im $\mathbb{R}^{n \times n}$. Man bereche $\|D\|_2, \|D\|_\infty$, wenn man D als Element vom $\mathbb{R}^{n^2} \cong \mathbb{R}^{n \times n}$ betrachtet.

    Weiters berechne man die Abbildungsnorm von D als Element von $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, wenn man $\mathbb{R}^n$ vorne und hinten mit der $\|.\|_2$-Norm versieht.