Übungen zu Analysis 2, 11. Übung

1. Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $w \in D$ mit $K_r(w) \subseteq D$, $c \in \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{C}$ stetig und $\gamma_j : [0, 2\pi] \to D$ $(j = 1, 2)$ definiert durch $\gamma_1(t) = w + r\exp(it)$ bzw. $\gamma_2(t) = w + r\exp(i(t + c))$. Skizzieren Sie die Situation und zeigen Sie, dass
$$\int_{\gamma_1} f(z)\ dz = \int_{\gamma_2} f(z)\ dz\ .$$

2. Sind die Funktionen $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\cos : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und $\sin : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph? Wenn ja, warum? Weiters gebe man in dem Fall jeweils eine Stammfunktion dieser Funktionen f an (also das F mit $F' = f$)! Schließlich gebe man auch eine Stammfunktion von $z^2(\cos z)^2$ an!

3. Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph. Man zeige, dass $\Delta \operatorname{Re} f = \Delta \operatorname{Im} f = 0$ und dass $\Delta(|f|^2) \geq 0$; vgl. Bsp. 2 der achten Übung.

4. Verwenden Sie das letzte Beispiel und Bsp. 2 der achten Übung, um zu zeigen, dass wenn $G \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph ist, dann für jedes $w \in G$ und $\rho > 0$ mit $K_\rho(w) \subseteq G$ für alle $\zeta \in U_\rho(w)$
$$|f(\zeta)| \leq \max_{z \in K_\rho(w) \setminus U_\rho(w)} |f(z)|,$$
$$\min_{z \in K_\rho(w) \setminus U_\rho(w)} \operatorname{Re} f(z) \leq \operatorname{Re} f(\zeta) \leq \max_{z \in K_\rho(w) \setminus U_\rho(w)} \operatorname{Re} f(z)$$
$$\min_{z \in K_\rho(w) \setminus U_\rho(w)} \operatorname{Im} f(z) \leq \operatorname{Im} f(\zeta) \leq \max_{z \in K_\rho(w) \setminus U_\rho(w)} \operatorname{Im} f(z)$$
gilt.

5. Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und seien $f, g : G \to \mathbb{C}$ zwei holomorphe Funktionen. Man zeige, dass $f \equiv g$, falls $f(z_n) = g(z_n)$ für eine Folge (z_n) aus G mit Häufungspunkt z in G, wobei $z_n \neq z$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$.

   Hinweis: Zeigen Sie, dass $A = \{z \in G : \exists \epsilon > 0, f|_{U_\epsilon(z)} \equiv g|_{U_\epsilon(z)}\}$ offen und nicht-leer ist; werfen Sie dafür einen Blick auf Korollar 6.7.9 im Ana1 Skriptum. Zeigen Sie auch, dass $c(A) \cap G = A$. Nun betrachte man $B := G \setminus c(A)$....

6. Man leite die Potenzreihenentwicklung von $z^2(\cos z)^2$ um den Punkt 0 her! Wie groß ist der Konvergenzradius dieser Potenzreihe?

   Hinweis: Siehe Bsp. 4 aus der 11ten Analysis 1 Übung!

7. Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph. Zeigen Sie, dass dann auch $f^* : \bar{D} \to \mathbb{C}$ holomorph ist, wobei $\bar{D} = \{\bar{z} : z \in D\}$ und $f^*(z) = \overline{f(\bar{z})}$.

8. Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x)$ aus Bsp. 1 der ersten Übung auch für $x \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ eine wohldefinierte komplexwertige Funktion ist. Zeigen Sie, dass diese Funktion auch holomorph ist.

9. Zeigen Sie, dass die Funktion $f(z)$ aus dem vorherigen Beispiel für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ mit $z \mapsto \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)}$ übereinstimmt.

10. Berechnen Sie für die Funktion $f(z) = \frac{1}{z+1} + \frac{1}{z-1}$

$$\int_{\gamma_1} f(z)\ dz + \int_{\gamma_2} f(z)\ dz \quad \text{und} \quad \int_{\gamma_3} f(z)\ dz\ ,$$

wobei $\gamma_j : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ ($j = 1, 2, 3$) mit $\gamma_j(t) = (-1)^j + \frac{1}{2}\exp(it)$ für $j = 1, 2$ und $\gamma_3(t) = 4\exp(it)$.