Übungen zu Analysis 2, 2. Übung 19. 3. 2013

1. Berechnen Sie die Ableitung von artanh und arcosh.

2. Man betrachte die Funktion $f(x) = x^3 + 1 : [0,1] \to [0,1]$. Wählen Sie $n+1$ äquidistante Stützstellen, und berechnen Sie zur entsprechenden Zerlegung $\mathcal{Z}_n$ von $[0,1]$ die Ober- und die Untersummen, sowie $\lim_{n\to\infty} O(\mathcal{Z}_n)$, $\lim_{n\to\infty} U(\mathcal{Z}_n)$.

   Hinweis: $4\sum_{k=1}^n k^3 = n^2(n+1)^2$.

3. Man zeige, dass ($\alpha \in \mathbb{R}$)

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$$

   für $0 \le x < 1$, indem man zeigt, dass das Taylorsche Restglied gegen Null konvergiert.

   Anmerkung: Die Gleichheit gilt auch für $-1 < x < 0$, denn die Potenzreihe $1 + \sum_{n=1}^\infty \binom{\alpha}{n} x^n$ hat Konvergenzradius 1 und stimmt für $\alpha \in \mathbb{Q}$ mit $(1+x)^\alpha$ überein. Nun kann man mit Hilfe des Weierstrasskriterium zeigen, dass $1+\sum_{n=1}^\infty \binom{\alpha}{n} x^n$ bei festem $x \in (-1,1)$ stetig in α ist, wenn α in einer beliebigen kompakten Menge der Form $[-K,K]$ läuft. Da $(1+x)^\alpha$ und $1+\sum_{n=1}^\infty \binom{\alpha}{n} x^n$ stetige Funktionen in α sind und auf der dichten Menge $[-K,K] \cap \mathbb{Q}$ übereinstimmen, müssen sie auf ganz $[-K,K]$ übereinstimmen.

4. Führen Sie bei den Funktionen $f_1(x) = x^2 e^{-\frac{1}{x^2}}$ mit $f_1(0) = 0$ und $f_2(x) = x^3 - \frac{48}{x}$, $x \neq 0$ je eine Kurvendiskussion durch.

   Bestimmen Sie also Nullstellen, lokale (globale Extrema), wo ist die Funktion (streng) monoton wachsend bzw. fallend, Wendpunkte, also Stellen, wo die erste Ableitung der Funktion ein lokales Extremum hat.

5. Man bestimme die unbestimmten Integrale

$$\int (x^3 + x^2 - 1)e^{2x-4}\, dx \text{ und } \int x^2 \exp(wx)\, dx,$$

   wobei $w \in \mathbb{C}$ beliebig aber fest ist.

6. Man berechne

$$\int \frac{e^{2x}-1}{e^x+2}\, dx \text{ und } \int x^2 \sin x\, dx.$$

   Hinweis: Hat man eine Funktion f der Gestalt $f(x) = R(e^x)$ wobei R eine rationale Funktion ist, so kann man deren Integral stets mit Hilfe der Substitution $t = e^x$ auf das Integral einer rationalen Funktion bringen.

7. Man berechne durch geeignte Substitutionen folgende Integrale:

$$\int \frac{e^x - 1}{e^x + 1}\, dx, \qquad \int \frac{x - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x}}\, dx.$$

8. Berechnen Sie

$$\int \frac{x+1}{x^2-x-2}\,dx, \int \frac{x^2}{x^3+4x^2+5x+2}\,dx$$

9. Man betrachte für $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$,

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(x-k)^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(x+k)^2} + \frac{1}{x^2},$$

und zeige, dass diese Funktion auf $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ wohldefiniert und stetig ist.

Hinweis: Für die Stetigkeit betrachte man zunächst $x \in [-K, K]$ für ein $K \in \mathbb{N}$ und schreibe $f(x) = \sum_{k=K+1}^{\infty} \frac{1}{(x-k)^2} + \sum_{k=K+1}^{\infty} \frac{1}{(x+k)^2} + {} + \sum_{k=-K}^{K} \frac{1}{(x-k)^2}$. Man zeige, dass man auf die beiden Reihen das Weierstraß Kriterium anwenden kann.

10. Zeigen Sie: Ist f durch die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ mit Konvergenzradius $R > 0$ gegeben, so hat $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ die Potenzreihendarstellung $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1}$.