Übungen zu Analysis 2, 3. Übung 9. 4. 2013

1. Es sei

$$\begin{aligned} A_0 :=& [0,1], \\ A_1 :=& [0,1/3] \cup [2/3,1], \\ A_{n+1} :=& A_n \setminus \left(\cup_{k=0}^{3^n-1} \left(\frac{3k+1}{3^{n+1}}, \frac{3k+2}{3^{n+1}} \right) \right) \\ C :=& \cap_n A_n \end{aligned}$$

d.h. man entfernt ausgehend vom Intervall $[0,1]$ immer die offenen mittleren Drittel der auftretenden abgeschlossenen Intervalle.

Zeigen Sie A_n besteht aus allen $x \in [0,1]$, die eine Darstellung $x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k 3^{-k}$ mit

$$a_k \in \begin{cases} \{0,2\} & k \leq n \\ \{0,1,2\} & k > n \end{cases}$$

haben und C aus allen $x \in [0,1]$ mit x hat eine Darstellung $x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k 3^{-k}$ mit $a_k \in \{0,2\}$ $\forall k$ haben. Zeigen Sie, dass $C \to [0,1]$, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k 3^{-k} \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{2} 2^{-k}$ mit $a_k \in \{0,2\}$ eine surjektive Abbildung von C auf $[0,1]$ ist.

2. Zeigen Sie die Indikatorfunktion der Cantormenge C ist Riemann-integrierbar und berechnen Sie $\int_0^1 1_C(t)\,dt$.

3. Zeigen Sie, dass die Cantormenge genau die Menge der Unstetigkeitsstellen der Indikatorfunktion der Cantormenge C ist.

4. Zeigen Sie mit Hilfe der Integralrechnung (Ober-, Unter-, Riemannsummen), dass

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^k + 2^k + \ldots + n^k}{n^{k+1}} = \frac{1}{k+1} \qquad (k,n \in \mathbb{N}).$$

Hinweis: $\frac{x^{k+1}}{k+1}$ ist eine Stammfunktion von x^k und es gilt $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$, wenn F eine Stammfunktion von f ist.

5. Welche folgender Integrale sind eigentliche bzw. uneigentliche Riemann-Integrale? Weiters berechne man diese ($r > 0$):

$$\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2} dx, \quad \int_{1}^{3} \frac{\sqrt{x^2+4x+5}}{2+x+\sqrt{x^2+4x+5}} dx.$$

Hinweis: zum letzten Integral: Substituieren Sie zuerst so, dass $x^2+4x+5 = (x+2)^2+1 = t^2+1$.

6. Sei $\alpha \geq 0$, und I_α sei definiert als

$$I_\alpha = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^\alpha x \; dx.$$

Man finde durch partielle Integration eine Relation zwischen I_α und $I_{\alpha+2}$. Man zeige mit Hilfe dieser Rekursionsformel, dass für $k \in \mathbb{N}$ folgende zwei Formeln gelten:

$$I_{2k} = \frac{2k-1}{2k} \cdot \frac{2k-3}{2k-2} \cdot \cdots \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2},$$

$$I_{2k+1} = \frac{2k}{2k+1} \cdot \frac{2k-2}{2k-1} \cdot \cdots \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3}.$$

7. Für $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ und $k \in \mathbb{N}$ zeige man

$$\sin^{2k+1} x \leq \sin^{2k} x \leq \sin^{2k-1} x.$$

Daraus und aus dem vorigen Beispiel leite man folgende Ungleichungen her:

$$\frac{2 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot (2k)}{3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2k+1)} \leq \frac{1 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (2k-1) \cdot \pi}{2 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot (2k) \cdot 2} \leq \frac{2 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot (2k-2)}{3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2k-1)}.$$

Nun forme man diese Ungleichung so um, sodass in der Mitte nur noch $\frac{\pi}{2}$ steht, und man leite daraus die Wallische Produktformel her:

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \to \infty} \frac{2^2 \cdot 4^2 \cdot \cdots \cdot (2k)^2}{3^2 \cdot 5^2 \cdot \cdots \cdot (2k-1)^2} \cdot \frac{1}{2k}.$$

8. Sind folgende uneigentlichen Integrale absolut konvergent oder nicht?

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x) \; dx, \quad \int_{0}^{1} \frac{\ln x}{e^{2x} - e^x} \; dx, \quad \int_{0}^{+\infty} \frac{x \ln x}{(x^2+1)^3} \; dx.$$

Hinweis zur Divergenz: Aus Lemma 8.6.3. folgt, dass wenn ein uneigentliches Integral $\int_a^b |f(x)| \; dx$ divergiert, und wenn $|g(x)| \geq |f(x)|$ auch $\int_a^b |g(x)| \; dx$ divergiert (Divergente Minorante).

9. Man berechne die Integrale:

$$\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x} dx, \quad \int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sin^2 x \cos^4 x} dx.$$

10. Sei $f(x)$ auf $[0, n]$ stetig differenzierbar. Man zeige durch eine Zerlegung von $\int_0^n$ in $\sum_{j=1}^n \int_{j-1}^j$ und unter Verwendung der partiellen Integration, dass sich die Differenz von $\sum_{k=1}^n f(k)$ und $\int_0^n f(x)dx$ berechnen lässt durch

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_{0}^{n} f(x)dx = \int_{0}^{n} (x - [x]) f'(x) dx.$$

Außerdem zeige man:

$$\sum_{k=0}^{n} f(k) = \int_{0}^{n} f(x)dx + \frac{f(0) + f(n)}{2} + \int_{0}^{n} (x - [x] - \frac{1}{2}) f'(x) dx.$$