5. Übungen Analysis 2, 23. 4. 2013

Zweiter Test am 26. 4. 18:00 – 19:30 Informatikhörsaal!!

1. Zeigen Sie mit Bsp. 8.7.13 ($\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$)

$$h\sum_{k=0}^{\infty} e^{-k^2h^2} > \frac{\sqrt{\pi}}{2} > h\sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^2h^2}$$

und damit

$$\lim_{t\to 1-0} \sqrt{1-t}\sum_{k=0}^{\infty} t^{k^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

2. Man berechne $\Gamma(\frac{1}{2})$.

3. Zeigen Sie mit Hilfe des Restgliedes in Integralform, dass die Taylorreihe der Funktion $f(x) = \ln(1-x)$ für $|x| < 1$ gegen f konvergiert.

4. Sei $p \in \mathbb{R},\ p > 1$ und sei $q = \frac{p}{p-1}$ und $a, b > 0$ Zeigen Sie die Young'sche Ungleichung

$$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Hinweis: Wenden sie Bsp. 8 der 1. Übung auf die Exponentialfunktion an: $\exp(\frac{1}{p}\ln a^p + \frac{1}{q}\ln b^q) \le$ ....

5. Beweisen Sie die Hölder'sche Ungleichung

Sei $p \in \mathbb{R},\ p > 1$ und sei $q = \frac{p}{p-1}$. Weiters seien $a_j, b_j \in [0, +\infty),\ j = 1, \ldots, n$. Dann gilt

$$\sum_{j=1}^{n} a_j b_j \le \left(\sum_{j=1}^{n} a_j^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=1}^{n} b_j^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Hinweis: Ungleichung v. Young!

6. Für $p \ge 1$ sei $\|.\|_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\|(x_j)_{j=1}^n\|_p := \sqrt[p]{\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p}.$$

Man zeige, dass $\|.\|_p$ eine Norm ist.

Hinweis: Es gilt $\sum_j |x_j + y_j|^p \le \sum_j |x_j||x_j + y_j|^{p-1} + \sum_j |y_j||x_j + y_j|^{p-1}$. Nun wende man die Höldersche Ungleichung an, ...

7. Man zeige, dass alle Normen $\|.\|_p,\ p \in [1, \infty]$ auf $\mathbb{R}^n$ äquivalent sind. Man zeige insbesondere, dass $(1 \leq p < q < \infty)$

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_q \leq \|x\|_p \leq n\|x\|_\infty.$$

   Weiters zeige man $\lim_{p\to\infty} \|(x_j)_{j=1}^n\|_p = \|(x_j)_{j=1}^n\|_\infty$.

   Hinweis: Man verwende, dass aus $0 < p < q$ und $\lambda \in [0, 1]$ folgt, dass $\lambda^q \leq \lambda^p$.

8. Man zeige, dass $(c, \|.\|_\infty)$ ein Banachraum ist. Dabei ist c die Menge aller komplexwertigen Folgen $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die konvergieren.

9. Berechnen Sie dass für stetige Abbildungen F und G von $[0, 1]$ nach $(C[0, 1], \|\cdot\|_\infty)$ auch die Abbildung $FG: \ (FG(t))(u) = F(t)(u) \cdot G(t)(u)$ von $[0, 1]$ nach $(C[0, 1], \|\cdot\|_\infty)$ auf $[0, 1]$ nach t integrierbar ist, wobei das Produkt zweier Elemente von $C[0, 1]$ punktweise erklärt ist, d.h. $fg(u) = f(u) \cdot g(u)$.