6. Übungen Analysis 2, 30. 4. 2013

Zweiter Test am 26. 4. 18:00 – 19:30 Informatikhörsaal!!

1. Seien $T, A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, und sei T invertierbar. Man zeige, dass $T^{-1}e^{A}T = e^{T^{-1}AT}$. Weiters berechne man e^{A}, wenn A eine Diagonalmatrix ist und wenn
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Zeigen Sie durch ein Gegenbeispiel, dass im Allgemeinen für Abbildungen $A, B \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n),\ n > 1$ nicht $e^{tA}e^{tB} = e^{t(A+B)}$ gilt.

3. Beweisen Sie den Satz von Schwarz ohne Integration sondern nur unter Verwendung des Mittelwertsatzes.

   Betrachten Sie hierzu $g(x) := f(x, y_0 + t) - f(x, y_0)$ und $h(t) := g(x_0 + t) - g(x_0)$, sowie die entsprechenden Funktionen $\tilde{g}(y_0)$ und $\tilde{h}(t)$.

4. Sei $f(x, y, z) = e^{A}$ mit $A = \begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix}$.

   Zeigen Sie $f \in C^{\infty}(\mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, z) : x = z\})$. ($\begin{pmatrix} a, b \\ b, d \end{pmatrix} \cong (a, b, d) \in \mathbb{R}^3$)

   Hinw.: Zeigen Sie, dass die Eigenwerte und die Transformationsmatrix als C^{∞}-Funktionen auf dem Definitionsbereich gewählt werden können.

5. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Für $c \in \mathbb{R}$ heißt die Lösungsmenge der Gleichung $f(x_1, x_2) = c$ eine Niveaulinie. Zeigen Sie: Ist das Bild von $(-\delta, \delta) \to \mathbb{R}^2,\ t \to g(t)$ Teil einer Niveaulinie von f, so gilt $\frac{\partial f}{\partial \nu}(g(t)) = 0$ für $\nu = (g_1'(t), g_2'(t))$.

6. Zeigen Sie: Für eine C^1-Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gilt mit den Funktionen $x_i(\mathbf{x}) = x_i,\ i = 1, \ldots, n,\ \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$:
$$df(\mathbf{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x})dx_1(\mathbf{x}) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x})dx_n(\mathbf{x}).$$

7. Zeigen Sie dass für die Halbsphäre $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2},\ x^2 + y^2 < 1$ die Bildmenge von $(r, s) \to (r, s, dz(x, y)(r, s)^t)$ orthogonal auf $\left(x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2}\right)$ steht und interpretieren Sie diese Aussage geometrisch.

8. Berechnen Sie für die Funktion $f :\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x, y) = \sin x \cos(x + y)$ $df(x, y)$, $d^2 f(x, y)$ sowie das Taylorpolynom 2. Ordnung um $(0, 0)$. Zeigen Sie, dass die Taylorreihe in ganz $\mathbb{R}^2$ konvergiert.

9. Berechnen Sie das Differential der Funktion
$$f :\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ f(x, y, z) = \begin{pmatrix} x^2 - y \\ \cosh(xz) \\ \arctan(y + xz) \end{pmatrix}$$