# 9. Übungen Analysis 2, 28. 5. 2013

## Dritter Test am 24. 5. 18:00 – 19:30 FH HS1 !!

1. Berechnen Sie die Riemann-Stieltjes-Integrale $\int_a^b f\,dg$ für $f(x) = \sin x,\ g(x) = x + \operatorname{sgn}(x)$ bzw. für $f(x) = x^2,\ g(x) = |x|$.

2. Zeigen Sie, dass jede konvexe Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ einfach zusammenhängend ist.

3. Finden Sie Lösungen der Differentialgleichung
$$2x + y + (x + y)\frac{dy}{dx} = 0.$$

4. Finden Sie eine nichttriviale stetig differenzierbare Funktion $F$ auf einer geeigneten Teilmenge $\Omega$ des $\mathbb{R}^3$, sodass für jeden stetig differenzierbaren Weg $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)^t$, der in die Nullstellenmenge von $F$ abbildet, gilt
$$2xy\frac{d\gamma_1}{dt} + (x^2 - 2yz)\frac{d\gamma_2}{dt} + (1 - y^2)\frac{d\gamma_3}{dt} = 0.$$

5. Finden Sie eine Lösung der Differentialgleichung
$$3xy + 2y^3 + (2x^2 + 4xy^2)\frac{dy}{dx} = 0$$
auf einem geeigneten Intervall $(a, b)$.

   Hinw.: Finden Sie einen integrierenden Faktor der gleichen Bauart wie die in der DG auftretenden Terme.

6. Welche der Funktionen
$$f(z) = z\bar{z}, \quad f(z) = \operatorname{Re} z + 2i \operatorname{Im} z, \quad f(z) = \ln|z| + \arctan\left(\frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z}\right), \operatorname{Re} z > 0$$
ist holomorph?

7. Berechnen Sie $\int_\gamma \bar{z}\,dz$ für den Weg $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ und begründen Sie damit dass $z \to \bar{z}$ nicht holomorph ist.

8. Zeigen Sie mithilfe der Cauchy'schen Integralformel das folgende Maximumsprinzip: Ist $f$ eine auf $\{z : |z| \leq 1\}$ holomorphe Funktion, so gilt $|f(0)| \leq \max\{|f(z)| : |z| = 1\}$.

9. Beweisen Sie den Fundamentalsatz der Algebra mithilfe des Satzes von Liouville: Zeigen sie für jedes nicht konstante Polynom $p$ gilt $\lim_{|z|\to\infty} |p(z)| = \infty$ und betrachten Sie $1/p$ auf $\mathbb{C}$.