10. Übungen Analysis 2, 4. 6. 2013

1. Für welche reellen Parameter a ist das Vektorfeld $\mathbf{v}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein Gradientenfeld?

$$\mathbf{v}(x, y, z) = (2x + 2xy + z^3, x^2 + 1, a(z^2x + 2z))^T$$

Berechnen Sie gegebenenfalls eine Stammfunktion von $\mathbf{v}$.

2. Zeigen Sie, dass $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 + y^2 < 1, \, (x, y) \neq (0, 0)\}$ nicht einfach zusammenhängend ist, indem Sie das Wegintegral $\int_\gamma f(\zeta)\, d\zeta$ für den Weg $\gamma: \; [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2; \; \gamma(t) = (\frac{1}{2}\cos t, \frac{1}{2}\sin t)$ und die Funktion

$$f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}(-y, x)$$

betrachten.

3. Zeigen Sie, dass in $\mathbb{R}^3 \setminus K_{1/2}(0)$ $(K_{1/2}(0) = \{(x, y, z) : \; x^2 + y^2 + z^2 \leq 1/2\})$ die Wege $\gamma_1, \; \gamma_2, \; [0, \pi] \to \mathbb{R}^3, \gamma_1(t) = (\cos t, \sin t, 0), \; \gamma_2(t) = (\cos t, 0, \sin t)$ zueindander homotop sind.

4. Berechnen Sie das Wegintegral $\int_\gamma f_1(x, y)\, dx + f_2(x, y)\, dy$ für den Weg $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \; \gamma(t) = ((1 + (\sin t)/2)\cos t, (1 + (\sin t)/2)\sin t)^T$ und das Vektorfeld $(f_1(x, y), f_2(x, y)) = (2xy\cos(x^2), \sin(x^2))$.

5. Zeigen Sie dass für eine in z_0 holomorphe Funktion f mit $f'(z_0) \neq 0$ die Abbildung $z \mapsto f(z)$ in z_0 winkeltreu ist, dh. für stetig differenzierbare Wege $\gamma_1, \; \gamma_2 \; [a, b] \to \mathbb{C}, a < 0 < b$ mit $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = z_0$ und $\gamma_1'(0), \, \gamma_2'(0) \neq 0$ gilt $\angle(f(\gamma_1)', f(\gamma_2)') = \angle(\gamma_1', \gamma_2')$, wobei $\angle(a, b)$ als $\arg(a\bar{b})$ definiert ist.

6. Berechnen Sie das Integral $\int_\mathbb{R} \frac{1}{1+x^2}\, dx$ indem Sie das komplexe Wegintegral der Funktion $f(z) = 1/(1+z^2)$ über einen Halbkreis der vom Intervall $[-R, R] \subset \mathbb{R}$ und dem Kreisbogen $\{Re^{i\varphi} \in \mathbb{C} : \; \varphi \in [0, \pi]\}$ berandet ist betrachten. Zerlegen Sie hierzu f mit Partialbruchzerlegung und verwenden Sie den Cauchy'schen Integralsatz sowie die Cauchy'sche Integralformel. Bilden Sie dann den Grenzwert $R \to \infty$.

7. Berechnen Sie Fresnell'schen Integrale:

$$\int_0^\infty \sin(x^2)\, dx \quad \text{ und } \quad \int_0^\infty \cos(x^2)\, dx.$$

Hinw.: Betrachten Sie die komplexen Integrale $\int_{\Gamma_R} f(z)\, dz$ der Funktion $f(z) = e^{ix^2}$ über die Wege Γ_R in $\mathbb{C}$, die auf der reellen Achse von 0 nach R, dann längs eines Kreisbogens von R nach $R/\sqrt{2} + iR/\sqrt{2}$ und dann von diesem Endpunkt zu 0 zurückführen (Tortenstück). Zeigen Sie dass für $R \to \infty$ das Integral über den Kreisbogen gegen 0 konvergiert und verwenden Sie $\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}/2$ sowie den Cauchy'schen Integralsatz.

8. Berechnen Sie für $f(z) = \sum_{-N}^{N} a_n z^n$ das Integral $\int_{\gamma_R} f(z)\,dz$ für $\gamma_R : [0, 2\pi] \to \mathbb{C},\ \gamma_R(\varphi) = Re^{i\varphi}$.

9. Zeigen Sie für $|z - z_0| < \min(|z_0 - i|, |z_0 + i|)$ konvergiert die Taylorreihe der Funktion $f(z) = \frac{\sin z}{1+z^2},\ z \neq \pm i$ um $z_0 \neq \pm i$ gegen f.