Analysis II Übung - Blatt 1, für den 18. 03. 2014

1. (Polarkoordinaten) Für $r \in \mathbb{R}^+$ und $\varphi \in [0, 2\pi)$ sei

$$x = r\cos\varphi \qquad y = r\sin\varphi.$$

Bestimmen Sie die Umkehrfunktion $r = r(x, y), \varphi = \varphi(x, y)$, und berechnen Sie deren Jacobimatrix $\frac{d(r,\varphi)}{d(x,y)}$.

2. Bestimmen Sie die Jacobimatrix $\frac{d(r,\varphi)}{d(x,y)}$ mithilfe des Hauptsatzes über inverse Funktionen.

3. Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regulär, $b \in \mathbb{R}^n$, und $x \in \mathbb{R}^n$ die Lösung des linearean Gleichungssystems

$$Ax = b$$

Bestimmen Sie die Ableitung der Lösung x nach den Einträgen in der Matrix und des Rechte-Seite-Vektors:

$$\frac{\partial x}{\partial a_{ij}} \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial x}{\partial b_i}$$

4. Sei λ ein reeller Eigenwert der Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit einfacher algebraischer Vielfachheit. Bestimmen Sie die Ableitung des Eigenwerts nach den Matrixeinträgen. Hinweis: Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$ und Eigenvektor $x \in \mathbb{R}^n$ löst

$$F(A, x, \lambda) = (Ax - \lambda x, \|x\|_2^2 - 1) = 0 \in \mathbb{R}^{n+1}$$

Wissen aus Lineare Algebra ist hilfreich.

5. Wenden Sie die Methode der Lagrangemultiplikatoren auf die Extremwertaufgabe

$$\max_{\substack{x\in\mathbb{R}^n \\ \|x\|_2=1}} x^T A x$$

mit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch an. Wie können Sie die Lösung charakterisieren ? Weisen Sie damit die Existenz eines Eigenwertes von A nach.

6. Lösen Sie die Extremwertaufgabe

$$m(a) := \min_{\substack{x\in\mathbb{R}^2 \\ x^2+2y^2=a}} \; 2x + 3y$$

für $a > 0$. Berechnen Sie $\frac{dm}{da}$, vgl. Bem 6.75.

7. Lösen Sie die Extremwertaufgabe

$$\min_{\substack{x\in\mathbb{R}^n \\ \sum_{i=1}^n x_i = 1}} \sum_{i=1}^n i x_i^2$$

Finden Sie Stelle und Wert des Minimums.

8. Sei $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ konvex, $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit $m < n$ habe vollen Zeilenrang. Sei $\overline{x}$ Stelle eines Minimums unter Nebenbedingung

$$\min_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ Bx = 0}} f(x)$$

Sei $\overline{\lambda} \in \mathbb{R}^m$ der (existierende !) Lagrangeparameter sodass $\nabla L(\overline{x}, \overline{\lambda}) = 0$, mit $L(x, \lambda) = f(x) + \lambda^T Bx$.

Zeigen Sie:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in \mathbb{R}^m : \qquad L(\overline{x}, \lambda) \leq L(\overline{x}, \overline{\lambda}) \leq L(x, \overline{\lambda})$$

Zeigen Sie weiters: Die Funktion

$$\varphi(\lambda) := \inf_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) + \lambda^T Bx$$

ist konkav, und $\overline{\lambda}$ ist Stelle eines Maximums von φ, dessen Wert ist $L(\overline{x}, \overline{\lambda})$.