

Analysis II Übung - Blatt 3, für den 1. 04. 2014

17. Zeigen Sie:

- (a) Jede abzählbare Menge ist eine Nullmenge.
- (b) Eine abzählbare Vereinigung von Nullmengen ist wieder eine Nullmenge

18. Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ monoton. Zeigen Sie über das Lebesgue-Kriterium dass f Riemann-integrierbar ist. Zeigen Sie dafür dass die Unstetigkeitspunkte eine Nullmenge bilden.

19. Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ Lipschitz-stetig. Zeigen Sie dass $\{f(t) : t \in [a, b]\}$ eine Nullmenge ist.

20. Bestimmen Sie das Riemann-Integral $\int_0^1 x^2 dx$ direkt nach Definition 7.12

21. Es sei $a < b < c$, und $f : [a, c] \rightarrow \mathbb{R}$. Zeigen Sie: Falls $f|_{[a,b]}$ und $f|_{[b,c]}$ Riemann-integrierbar sind, dann ist auch f Riemann-integrierbar mit

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$$

Zeigen Sie dies lediglich unter Verwendung von Definition 7.12 bis Satz 7.14.

22. Berechnen Sie

$$\int_0^\pi \sin(nx) \sin(mx) dx \quad \forall n, m \in \mathbb{Z}$$

23. Es sei

$$f : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad f(x, y) = \begin{cases} 1 & y \leq x \\ 0 & y > x \end{cases}$$

Berechnen Sie $\int_{[0,1]^2} f(x, y) d(x, y)$ direkt nach Kapitel 7.2.

24. Wie Beispiel 23. Berechnen Sie $\int f$ mithilfe von Fubini. Überprüfen Sie genau die Voraussetzungen.