Analysis II Übung - Blatt 4, für den 8. 04. 2014

25. Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig. Man bestimme die 2. Ableitung der Funktion $G : [0,1] \to \mathbb{R}$ definiert durch
$$G(x) = \int_0^x (x-t)f(t)dt$$
Hinweis: Partielle Integration und mehrfach Satz 7.24

26. Für eine Zerlegung $Z = \{x_0, \dots, x_n\}$ vom Intervall $[a,b]$ seien Obersumme und Untersumme einer Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ definiert als
$$\begin{aligned} O(f,Z) &:= \sum_{i=1}^{n} \sup_{\xi \in [x_{i-1}, x_i]} f(\xi)\,(x_i - x_{i-1}) \\ U(f,Z) &:= \sum_{i=1}^{n} \inf_{\xi \in [x_{i-1}, x_i]} f(\xi)\,(x_i - x_{i-1}) \end{aligned}$$
Man zeige die Äquivalenz folgender Aussagen:
   (a)
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists Z : O(f,Z) - U(f,Z) < \varepsilon$$
   (b)
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall Z : \big[|Z| < \delta \Rightarrow O(f,Z) - U(f,Z) < \varepsilon\big]$$
Die Funktion f heißt damit Darboux integrierbar.

27. Man zeige dass $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ genau dann Darboux-integrierbar ist wenn sie auch Riemann-integrierbar ist.

28. Berechnen Sie die Inhalte der Einheitskugeln E_n in $\mathbb{R}^n$ für $n = 3$ und $n = 4$ mittels Fubini. Überprüfen Sie $|E_n| = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(1+n/2)}$ (mit der Gamma-Funktion $\Gamma(.)$).

29. Es sei
$$A_\varepsilon := \{x \in \mathbb{R}^3 : 1 \le \|x\|_2 \le 1 + \varepsilon\}$$
Berechnen Sie $|A_\varepsilon|$ mittels Substitution auf Kugelkoordinaten. Berchnen Sie
$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} |A_\varepsilon|$$

30. Berechnen Sie
$$\int_0^1 x^k (1-x)^l \, dx$$

31. Zeigen Sie für $k, l, m \in \mathbb{N}_0$ und $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$:

$$\int_T x^k y^l (1-x-y)^m \, d(x,y) = \frac{k!l!m!}{(k+l+m+2)!}$$

32. Zeigen Sie für ein beliebiges Dreieck T mit Eckpunkten A, B und C, und einer affin-linearen Funktion $f : T \to \mathbb{R}$:

$$\int_T f(x)dx = \frac{|T|}{3}(f(A) + f(B) + f(C))$$

Hinweis: Transformation auf das spezielle Dreieck aus Übung 31.