Analysis II Übung - Blatt 7, für den 13. 05. 2014

49. Seien A, B offen in $\mathbb{R}^n$, $g \in C^1(A, B)$ mit $g^{-1} \in C^1(B, A)$ (ein sog. Diffeomorphismus). Sei f ein Vektorfeld auf B. Definieren das VF $\hat{f}$ auf A über
$$\hat{f} := g'^{\,T} f \circ g$$
(covariant pullback), mit $g'^{\,T}$ die Transponierte der Jacobimatrix.

    Zeigen Sie: f ist Gradientenfeld gdw $\hat{f}$ ist Gradientenfeld.

    Sei C eine Kurve in A mit Parameterdarstellung γ. Dann ist $g(C)$ die Kurve in B mit PD $g \circ \gamma$. Zeigen Sie die Transformationsregel für Kurvenintegrale:
$$\int_C \hat{f} \cdot dx = \int_{g(C)} f \cdot dx$$

50. Überprüfen Sie die Transformationsregel für Kurvenintegrale anhand folgenden Beispiels: Polarkoordinaten $g : [0, \mathbb{R}^+) \times [0, 2\pi] \ni (r, \varphi) \mapsto (r \cos\varphi, r \sin\varphi)$ (bijektiv bis auf Rand).
$$f(x, y) = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} \right).$$
C sei Kurve in Polarkoordinaten mit PD $\gamma : [0, 2\pi] \ni t \mapsto (r(t), \varphi(t)) = (1 + t, t)$. Berechnen Sie direkt $\int_C \hat{f} \cdot d(r, \varphi)$ und $\int_{g(C)} f \cdot d(x, y)$.

51. Wie Ü 49, aber jetzt mit $g \in C^2$. Sei $n = 2$, definiere $\operatorname{curl} f = \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}$. Zeigen Sie:
$$\operatorname{curl} \hat{f} = \det g' \, (\operatorname{curl} f) \circ g.$$
Für $n = 2$ und $n = 3$ entsprechen die Komponenten von $\operatorname{curl} f$ genau den Einträgen von $2 \operatorname{skew} f'$, wobei $\operatorname{skew} A = \frac{1}{2}(A - A^T)$ der schief-symmetrische Anteil einer Matrix A ist. Zeigen Sie für $n \in \mathbb{N}$:
$$\operatorname{skew} \hat{f}' = g'^{\,T} (\operatorname{skew} f') \circ g \, g'$$

52. Sei $\widehat{D} \subset \mathbb{R}^2$ ein Normalbereich, und $g : A \supset \widehat{D} \to B$ ein C^2-Diffeomorphismus. Zeigen Sie den Greenschen Integralsatz für $D = g(\widehat{D})$ (deformierter Normalbereich):
$$\int_D \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \, dx = \int_{\partial D} f \cdot dx$$

53. Die Kurve C_1 lässt sich in $A \subset \mathbb{R}^n$ glatt in C_2 (mit gleichem Anfangspunkt a und Endpunkt b) überführen, d.h. $\exists \varphi \in C^2([0, 1]^2, A)$ mit

    - C_1 hat PD $[0, 1] \ni t \mapsto \varphi(0, t)$

- C_2 hat PD $[0,1] \ni t \mapsto \varphi(1,t)$
- $\forall\, s \in [0,1] : \varphi(s,0) = a,\ \varphi(s,1) = b.$

Zeigen Sie: Wenn f in A die Integrabilitätsbedingungen erfüllt, dann gilt

$$\int_{C_1} f \cdot dx = \int_{C_2} f \cdot dx$$

Hinweis: Berechne $\frac{d}{ds} \int_{C_s} f \cdot dx$, wobei die Kurve C_s die PD $t \mapsto \varphi(s,t)$ hat.

54. Zeigen Sie für $a, b, c \in \mathbb{R}^3$:

$$a \times (b \times c) = \langle a, c \rangle\ b - \langle a, b \rangle\ c$$

Hinweis: $(a \times b)_i = \sum_{j,k=1}^{3} \Gamma_{ijk} a_j b_k$ mit $\Gamma_{123} = \Gamma_{231} = \Gamma_{312} = 1$, $\Gamma_{132} = \Gamma_{213} = \Gamma_{321} = -1$ und sonst 0. Zeigen Sie $\sum_{k=1}^{3} \Gamma_{ijk} \Gamma_{mnk} = \delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm}$, mit dem Kronecker-delta δ.

55. Es seien u, v, w Skalarfelder, und a, b Vektorfelder in $\mathbb{R}^3$. Führen Sie folgende Ausdrücke auf Ableitungen in a, b, u, v, w zurück:

(a) $\operatorname{div}(a \times b)$

(b) $\operatorname{div}(\nabla u \times \nabla v)$

(c) $\operatorname{curl}(u \nabla v + v \nabla u)$

(d) $\operatorname{curl}(u(v \nabla w - w \nabla v))$

56. Sei $D = [0, \pi]^2$. Finden Sie eine Lösung der Laplace-Gleichung $\Delta u = 0$ auf D, mit Dirichlet-Randbedingung

$$u(x,y) = \begin{cases} \sin(kx) & \text{für } y = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

mit $k \in \mathbb{N}$. Plotten Sie die Lösungen für $k = 1, k = 3, k = 10$. Hinweis: Versuchen Sie Funktionen der Art $\sin(kx)\exp(\tilde{k}y)$.

Freiwilliger Zusatz nach Anregung aus Vorlesung: Ersetzen Sie Dirichlet-Randbedingung bei $y = \pi$ durch die zusätzliche Neumann-Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ bei $y = 0$, und bestimmen und plotten wieder die Lösungen für $k = 1, 3, 10$.