Analysis II Übung - Blatt 10, für den 3. 06. 2014

73. Ist die Funktionenfolge (f_n) mit $f_n : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R} : x \mapsto nxe^{-nx}$ punktweise, gleichmäßig bzw. kompakt konvergent ?

74. Zeigen Sie: Genau dann wenn A eine endliche Menge ist gilt: Ist eine Funktionenfolge (f_n) mit $f_n : A \to \mathbb{R}$ punktweise konvergent, dann ist sie auch gleichmäßig konvergent.

75. Sei $A \subset \mathbb{R}$ kompakt, und (f_n) konvergiere punktweise und für alle $x \in A$ monoton fallend gegen ein stetiges $f : A \to \mathbb{R}$. Folgt aus

    (a) jedes f_n ist oberhalb stetig bzw.

    (b) jedes f_n ist unterhalb stetig

    gleichmäßige Konvergenz (siehe Bem 5.43) ?

76. Rechtfertigen Sie den Nachweis von $(\sin x)' = \cos x$ durch gliedweise Differentiation der Funktionenreihe aus Satz 4.28.

77. Die Sinus-Fourier-Reihe einer integrierbaren Funktion $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ ist die Funktionenreihe
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx) \qquad \text{mit} \qquad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx)\, dx.$$
    Berechnen Sie die Sinus-Fourier-Reihe der Funktion
$$f(x) = \begin{cases} x & \text{für } x < \pi/2 \\ \pi - x & \text{sonst} \end{cases}$$
    Ist sie punktweise bzw. gleichmäßig konvergent ?

78. Berechnen Sie die Sinus-Fourier-Reihe von
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x < \pi/2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$
    ist sie gleichmäßig konvergent ? Freiwilliger Zusatz: punktweise konvergent ?

79. Zeigen Sie: Für $f \in C^2([0, \pi])$ und $f'(0) = f'(\pi) = 0$ ist deren Sinus-Fourier-Reihe gleichmäßig konvergent.

80. Sei $f \in C([a, b])$. Dann gibt es eine Funktionenfolge f_n mit $f_n \in C^1([a, b])$ und $f_n \xrightarrow{glm} f$. Hinweis: Definiere $f_n(x) := n \int_x^{x+1/n} \tilde{f}(s)\, ds$ mit $\tilde{f}(x) := f(x)$ für $x \in [a, b]$ und $\tilde{f}(x) := f(b)$ für $x > b$.