Analysis II Übung - Blatt 11, für den 17. 06. 2014

Für R-integrierbares $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ sind für $k \in \mathbb{N}_0$ die Fourierkoeffizienten definiert als

$$a_k := \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(kx)\,dx \qquad b_k := \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(kx)\,dx,$$

und damit das Fourierpolynom vom Grad n als

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)\right),$$

und die Fourierreihe als entsprechende Funktionenreihe

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)\right).$$

Die Fourierreihe ist besonders interessant für periodische Funktionen mit Periodenlänge 2π (d.h. $\forall\, x \in \mathbb{R} : f(x+2\pi) = f(x)$). Wir identifizieren die periodische Funktion auf $\mathbb{R}$ mit der Einschränkung auf eine Periode $[0, 2\pi]$. Wir definieren $C^m_{per}(0, 2\pi) := \{f \in C^m([0, 2\pi]) : f^{(j)}(0) = f^{(j)}(2\pi), 0 \le j \le m\}$, d.h. als Einschränkung periodischer Funktionen aus $C^m(\mathbb{R})$.

Wir untersuchen den Zusammenhang einer Funktion mit ihrer Fourierreihe, insbesonders zeigen wir hinreichende Bedingungen für die Konvergenz der Fourierreihe gegen die Funktion f. Es sei $\varphi_0 = 1$, $\varphi_{2k-1} = \cos(kx)$, $\varphi_{2k} = \sin(kx)$ für $k \in \mathbb{N}$.

81. Zeigen Sie:

    (a) $\int_0^{2\pi}(f - s_n)\varphi_k\,dx = 0 \qquad \forall\, k \le 2n$

    (b) $\int_0^{2\pi}(f - s_n)^2\,dx + \int_0^{2\pi} s_n^2\,dx = \int_0^{2\pi} f^2\,dx$

    (c) $\frac{\pi}{2}a_0^2 + \pi\sum_{k=0}^{\infty}\left(a_k^2 + b_k^2\right) \le \int_0^{2\pi} f^2\,dx$ (Besselsche Ungleichung)

    Interpretieren Sie die Relationen geometrisch (orthogonal, Pythagoras).

82. Falls $f \in C^1_{per}(0, 2\pi)$, dann konvergiert die Fourierreihe gleichmäßig. Hinweis: Vergleichen Sie die Fourierkoeffizienten von f mit den Fourierkoeffizienten von f', und verwenden Cauchy-Schwarz für $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n}\,|a_n|n$ um $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|$ abzuschätzen.

83. Zeigen Sie:

    $$s_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} D_n(x-y)f(y)\,dy = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(y)f(x-y)\,dy$$

    mit dem sogenannten Dirichlet-Kern

    $$D_n(y) = \frac{\sin\left((n+1/2)y\right)}{2\sin(y/2)}$$

für $y \neq 0$, und $D_n(0) = n + 1/2$. Plotten Sie D_{10}, D_{20}, D_{40} auf $[-\pi, \pi]$. Hinweis: $2\cos x = e^{ix} + e^{-ix}$, analog sin, geometrische Reihe $\sum_{k=-n}^{n} e^{ik(x-y)}$

84. Zeigen Sie: Wenn f R-integrierbar ist, dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx/2)\, dx = 0$$

Hinweis: Glieder einer konvergenten Reihe sind Nullfolge.

85. Zeigen Sie für $f \in C^1_{per}$ die punktweise Konvergenz der Fourierreihe gegen f:

$$\forall\, x \in [0, 2\pi] : s_n(x) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x)$$

Hinweis: Zeigen Sie $f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) D_n(y)\, dy$ um eine Darstellung für $s_n(x) - f(x)$ zu erhalten, wenden Sie Bsp 84 an.

86. Zeigen Sie für $f \in C^0_{per}$:

    (a) Die Fourierreihe konvergiert im quadratischen Mittel:

    $$\int_0^{2\pi} (f - s_n)^2 dx \to 0 \qquad \text{für } n \to \infty$$

    (b) Die Besselsche Ungleichung gilt mit Gleichheit.

    Hinweis: Zeigen Sie dass für $f \in C^0_{per}$ existiert ein $f^\varepsilon \in C^1_{per}$ mit $\|f - f^\varepsilon\|_\infty \leq \varepsilon$, verwenden Sie Linearität der Abbildung $f \mapsto s_n$.

87. Verwenden Sie die Fourierreihe zur Lösung der Wärmeleitungsgleichung: Gesucht ist eine Funktion $u : [0, 2\pi] \times [0, T] \to \mathbb{R}$, periodisch im ersten Argument sodass

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) &= 0 \quad \forall\, x \in [0, 2\pi]\ \forall t \in [0, T] \\ u(x, 0) &= u_0(x) \quad \forall\, x \in [0, 2\pi] \quad \text{(Anfangsbedingung)}, \end{aligned}$$

wobei $u_0 : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ vorgegeben sei. Verwenden Sie einen Reihenansatz

$$u(x,t) = \frac{a_0(t)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k(t) \cos(kx) + b_k(t) \sin(kx)),$$

wobei Sie $a_k(t) = a_k(0) exp(\alpha_k t)$ und $b_k(t)$ geeignet wählen. Berechnen und plotten Sie die Lösung für

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 & x \in [\frac{9\pi}{10}, \frac{11\pi}{10}] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

88. Wie zuvor, jetzt aber die Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0 \quad \forall\, x \in [0, 2\pi]\ \forall t \in [0, T]$$

und Anfangswerte $u(x, 0) = u_0(x)$ und $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = v_0(x)$. Verwenden Sie das u_0 von zuvor, und $v_0 = 0$.