

## Analysis II Übung - Blatt 12, für den 24. 06. 2014

89. Bestimmen Sie die Potenzreihe für  $\sqrt[3]{x}$ ,  $x \in \mathbb{R}_0^+$  mit Entwicklungspunkt  $x_0 = 2$ . Wo ist sie punktweise/kompakt/gleichmäßig konvergent? Stimmen am Konvergenzbereich Funktion und Potenzreihe überein?
90. Wie Beispiel 89 für  $f(z) = \frac{1}{4+z^2}$ ,  $z \in \mathbb{C}$ ,  $z^2 \neq -4$ . Hinweis: Partialbruchzerlegung.
91. Berechnen Sie  $\int_0^1 \cos(x^2) dx$  mit einem (bewiesenen!) Fehler kleiner als  $10^{-6}$ .
92. (Machinsche Formel). Zeigen Sie

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{4} &= 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239} \\ &= \frac{4}{5} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \left(\frac{1}{5}\right)^{2k} - \frac{1}{239} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \left(\frac{1}{239}\right)^{2k} \end{aligned}$$

Berechnen Sie daraus  $\pi$  mit einem (bewiesenen!) Fehler kleiner als  $10^{-10}$ .

Hinweis: Zeigen Sie zuerst die Funktionalgleichung

$$\arctan x + \arctan y = \arctan \frac{x+y}{1-xy}$$

für  $x, y \in \mathbb{R}$  mit  $|\arctan x + \arctan y| < \frac{\pi}{2}$ , und wenden diese für (a)  $x = y = 1/5$ , (b)  $x = y = 5/12$  und (c)  $x = 1, y = 1/239$  an.

93. Bilden Sie das arithmetische Mittel der ersten  $n+1$  Fourierpolynome (das sogenannte Cesaro Mittel)

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{1+n} \sum_{j=0}^n s_j(x),$$

wobei  $s_j$  die Fourierpolynome einer Funktion  $f$  sind (siehe Blatt 11). Zeigen Sie:

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_n(y) f(x-y) dy$$

mit dem Fejér-Kern

$$F_n(y) = \frac{1}{2(n+1)} \left( \frac{\sin((n+1)t/2)}{\sin(t/2)} \right)^2 \geq 0$$

94. Zeigen Sie

(a)  $\int_{-\pi}^{\pi} F_n(y) dy = \frac{1}{2}$

$$(b) \sup_{x \in [0, 2\pi]} \sigma_n(x) \leq \sup_{x \in [0, 2\pi]} f(x)$$

95. Zeigen Sie für  $f \in C_{per}$

$$\sigma_n \xrightarrow{\text{glm}} f.$$

Hinweise: Zeigen Sie

$$0 \leq F_n(t) \leq \frac{1}{2(n+1)} \frac{1}{\sin^2(\delta/2)} \quad \forall 0 \leq \delta \leq |t| \leq \pi$$

$$f(x) - \sigma_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_n(y)(f(x) - f(x+y)) dy,$$

verwenden dass  $f$  gleichmäßig stetig ist, und teilen das Integral in  $|y| < \delta$  und  $|y| > \delta$  auf.

96. Berechnen Sie die Fourierreihe und Cesaro Mittel für

$$(a) f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0, \pi) \\ -1 & x \in [\pi, 2\pi) \end{cases}$$

$$(b) f(x) = \begin{cases} x(\pi - x) & x \in [0, \pi) \\ (\pi - x)(x - 2\pi) & x \in [\pi, 2\pi) \end{cases}$$

Plotten Sie  $s_n, \sigma_n$  und  $\frac{1}{n} \sum_{k=n}^{2n-1} s_k = 2\sigma_{2n-1} - \sigma_{n-1}$  (sliding averages) für  $n = 5, 10, 20$ .