Analysis 2, 2. UE-Test, Gruppe B

1. Beispiel: Sei $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ in Matrixdarstellung gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Abbildungsnorm von A, wenn man $\mathbb{R}^2$ vorne mit $\|.\|_\infty$ und hinten mit $\|.\|_1$ versieht.
Berechnen Sie auch die $\|.\|_1$- und die $\|.\|_\infty$-Norm von A, wenn man $L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) \cong \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit dem $\mathbb{R}^4$ identifiziert.

Lösung: Für die Abbildungsnorm einer linearen Abbildung $A : X \to Y$ zwischen zwei normierten Räumen $(X, \|.\|_X)$ und $(Y, \|.\|_Y)$ gilt

$$\|A\| = \sup \{\|Ax\|_Y : x \in X, \|x\|_X = 1\}.$$

In unserem Fall gilt $(X, \|.\|_X) = (\mathbb{R}^2, \|.\|_\infty)$ und $(Y, \|.\|_Y) = (\mathbb{R}^2, \|.\|_1)$, und für einen beliebigen Vektor $x = (x_1, x_2)^T$ mit $\|x\|_\infty = 1$ folgt

$$\begin{aligned} \|Ax\|_1 &= |2x_1| + |-x_1 + 4x_2| \le 2|x_1| + |x_1| + 4|x_2| \\ &\le 7\max\{|x_1|, |x_2|\} = 7\|x\|_\infty = 7, \end{aligned}$$

was die Ungleichung $\|A\| \le 7$ impliziert. Für die andere Ungleichung betrachte den speziellen Vektor $x = (-1, 1)^T$, der natürlich $\|x\|_\infty = 1$ erfüllt, und folgere

$$\begin{aligned} \|A\| &= \sup \left\{\|Ax\|_1 : x \in \mathbb{R}^2, \|x\|_\infty = 1\right\} \\ &\ge \left\| A \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|_1 = |-2| + |1+4| = 7, \end{aligned}$$

da wir nun einen speziellen Vektor genommen haben, der in der Supremumsbildung vorkommt. Insgesamt haben wir also $\|A\| = 7$ gezeigt.

Um $L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) \cong \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit dem $\mathbb{R}^4$ zu identifizieren, schreiben wir die Matrix A um in einen Vektor $\tilde{A} = (2, -1, 0, 4)^T$ (oder auch $\hat{A} = (2, 0, -1, 4)^T$) und berechnen

$$\|\tilde{A}\|_1 = |2| + |-1| + |0| + |4| = 7$$

und

$$\|\tilde{A}\|_\infty = \max\{|2|, |-1|, |0|, |4|\} = 4.$$

2. Beispiel: Begründen Sie, warum die Funktion

$$g : x \mapsto \int_0^1 e^{-t} t^{x-1}\, dt$$

als Funktion von $(0, +\infty)$ nach $\mathbb{R}$ wohldefiniert (d.h. für $x \in (0, +\infty)$ existiert das Integral) und stetig ist!

Lösung: Wir müssen das Integral als uneigentliches Integral bei 0, d.h. als

$$\lim_{\alpha \to 0} \int_\alpha^1 e^{-t} t^{x-1}\, dt$$

auffassen. Bemerke dabei, dass t^{x-1} nur für $t \in \mathbb{R}^+$ und $x \in \mathbb{R}$ definiert ist durch

$$t^{x-1} := \exp\left((x-1)\ln t\right).$$

Wir wollen nun die Wohldefiniertheit des Integrals zeigen: Es gilt

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \to 0} \int_\alpha^1 e^{-t} t^{x-1}\, dt &\leq \lim_{\alpha \to 0} \int_\alpha^1 t^{x-1}\, dt \\ &= \lim_{\alpha \to 0} \frac{t^x}{x}\Big|_\alpha^1 = \lim_{\alpha \to 0} \frac{1}{x} - \frac{\alpha^x}{x} = \frac{1}{x}, \end{aligned}$$

da α^x für $\alpha \to 0$ gegen 0 konvergiert. Dies sieht man leicht, indem man $\alpha^x = \exp(x \ln \alpha)$ schreibt und auf der rechten Seite den Grenzübergang durchführt - man beachte dabei, dass man Limiten mit stetigen Funktionen vertauschen kann. Somit haben wir für unser ursprüngliches Integral eine konvergente Majorante gefunden, womit die Wohldefiniertheit gezeigt ist.

Um die Stetigkeit zu zeigen, gehen wir folgendermaßen vor: Sei $[a, b] \subseteq (0, +\infty)$ fest. Offenbar ist die Funktion

$$f(t, x) := e^{-t} t^{x-1}$$

als Zusammensetzung stetiger Funktionen auf $[\frac{1}{n}, 1] \times [a, b]$ stetig, wobei $n \in \mathbb{N}$. Nach dem Satz über Parameterintegrale (Korollar 8.7.9) sind dann auch die Funktionen $g_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$g_n(x) := \int_{\frac{1}{n}}^1 e^{-t} t^{x-1}\, dt$$

stetig. Man beachte hier, dass der Integrand stetig auf dem Produkt zweier kompakter Mengen sein muss! Wir wollen jetzt zeigen, dass die Funktionenfolge g_n gleichmäßig gegen die gegebene Funktion g konvergiert. Dazu schreiben wir

$$\begin{aligned}
\|g_n - g\|_\infty &= \sup_{x\in[a,b]} \left| \int_{\frac{1}{n}}^{1} e^{-t}t^{x-1}\,dt - \int_{0}^{1} e^{-t}t^{x-1}\,dt \right| \\
&= \sup_{x\in[a,b]} \lim_{\beta\to 0} \int_{\beta}^{\frac{1}{n}} e^{-t}t^{x-1}\,dt \\
&\leq \lim_{\beta\to 0} \int_{\beta}^{\frac{1}{n}} t^{a-1} = \lim_{\beta\to 0} \frac{1}{a}\left(\left(\frac{1}{n}\right)^{a} - \beta^{a}\right) = \frac{1}{a}\left(\frac{1}{n}\right)^{a},
\end{aligned}$$

was für $n \to \infty$ gegen 0 konvergiert. Somit konvergiert die Funktionenfolge g_n auf $[a,b]$ gleichmäßig gegen die Funktion g. Da gleichmäßige Konvergenz die Stetigkeit erhält, ist somit auch g stetig für $x \in [a,b]$. Da man für jedes $x \in (0,+\infty)$ eine kompakte Menge findet, die x enthält und noch ganz in $(0,+\infty)$ enthalten ist, folgt die Stetigkeit der Funktion g auf ihrem gesamten Definitionsbereich.