Gruppe B

Beispiel 1

Führen Sie eine Kurvendiskussion für die Funktion

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & (1-x^2)e^{-|x|} \end{array}$$

durch. Wo ist die Funktion stetig, wo ist sie differenzierbar? Wie ist das Grenzwertverhalten für $x \to \pm\infty$? Bestimmen Sie Nullstellen und lokale/globale Extrema! Auf welchen Teilintervallen ist die Funktion monoton wachsend bzw. fallend? Fertigen Sie eine Skizze der Funktion.

`Lösung:` Die Funktion f ist als Verknüpfung stetiger Funktionen selbst stetig. Um das Grenzverhalten gegen $\pm\infty$ wird die Regel von de L'Hospital verwendet. Man überzeugt sich einfach, dass die Voraussetzungen dafür in jedem Schritt gewährleistet sind.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-x^2}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-2x}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-2}{e^x} = 0$$

Da die Funktion f symmetrisch ist gilt auch $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

Um der Betragsfunktion beim Differenzieren aus dem Weg zu gehen, betrachtet man die Funktion f einmal eingeschränkt auf $\mathbb{R}^+$ und $\mathbb{R}^-$. Nach der Anwendung der Produktregel erhält man

$$f'(x) = \begin{cases} e^{-x}(x^2-2x-1), & x>0 \\ -e^x(x^2+2x-1), & x<0 \end{cases}$$

Die Funktionen f ist jeweils eingeschränkt auf $\mathbb{R}^+$ und $\mathbb{R}^-$ stetig differenzierbar (Verknüpfen von C^1 Funktionen). Bei 0 ist f nicht differenzierbar, da

$$\lim_{x\to0-} f'(x) = 1 \neq -1 = \lim_{x\to0+} f'(x)$$

gilt. Nachdem die exp-Funktion niemals 0 wird muss man für Nullstellen von f nur der Faktor $1-x^2$ betrachtet werden. Diesem Faktor sieht man unmittelbar die Nullstellen ±1 an. Für die Nullstellen von f' betrachtet man x^2-2x-1 wenn $x>0$ und x^2+2x-1 wenn $x<0$. Mit der Lösungsformel für Polynome zweiten Grades erhält man

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= 1 \pm \sqrt{2}, \qquad x>0 \\ x_{3,4} &= -1 \pm \sqrt{2}, \quad x<0. \end{aligned}$$

Da immer nur eine der beiden Nullstellen im Definitionsbereich ist, erhält man $\pm(1+\sqrt{2})$ als Nullstellen für f'. Außerdem liest man der Darstellung

$$f'(x) = \begin{cases} e^{-x}(x-1-\sqrt{2})(x-1+\sqrt{2}), & x>0 \\ -e^x(x+1+\sqrt{2})(x+1-\sqrt{2}), & x<0 \end{cases}$$

einfach ab, dass f' in $(-\infty, -1-\sqrt{2})$ negativ, in $(-1-\sqrt{2}, 0)$ positiv, in $(0, 1+\sqrt{2})$ negativ und in $(1+\sqrt{2}, +\infty)$ positiv ist. Damit ist f bis $-1-\sqrt{2}$ fallend, in $(-1-\sqrt{2}, 0)$ wachsend, in $(0, 1+\sqrt{2})$ fallend und ab $1+\sqrt{2}$ wachsend. Noch

dazu muss es sich deswegen bei $\pm(1+\sqrt{2})$ um lokale Minima und bei 0 um ein lokales Maxima handeln. 0 ist sogar eine ein globales Maximum, da f außerhalb von $[-1,1]$ negativ ist und in $[-1,0)$ wachsend und in $(0,1]$ fallend ist. Auch $\pm(1+\sqrt{2})$ sind globale Extrema, da $1+\sqrt{2}$, wegen der Monotonieüberlegungen ein globales Minimum von $f\big|_{\mathbb{R}^+}$ ist und f symmetrisch ist.

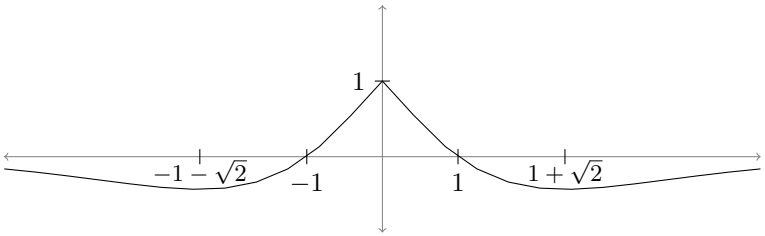

Abbildung 1: Skizze von f

Beispiel 2

Berechnen Sie

$$I := \int_4^{+\infty} \left(\frac{1}{t^2+2t-8} + \exp(-3|t-5|) \right) \mathrm{d}t.$$

<u>Lösung:</u> Zuerst nützt man die Linearität des Integrals und spaltet es in

$$\underbrace{\int_4^{+\infty} \frac{1}{t^2+2t-8}\,\mathrm{d}t}_{:=I_1} + \underbrace{\int_4^{+\infty} \exp(-3|t-5|)\,\mathrm{d}t}_{:=I_2}.$$

Nun berechne man I_1 und I_2 separat:

- Für den Integrand $\frac{1}{t^2+2t-8}$ von I_1 macht man eine Partialbruchzerlegung, indem man zu nächst die Nullstellen des Nenners mit Hilfe der Lösungsformel für Polynome zweiten Grades berechnet.

  $$\frac{1}{t^2+2t-8} = \frac{A}{t+4} + \frac{B}{t-2}$$

  Das ergibt das Gleichungssystem

  $$\underbrace{(A+B)}_{=0}\,t + \underbrace{4B-2A}_{=1} = 0t+1$$

  Somit erhält man $A = -\frac{1}{6}$ und $B = \frac{1}{6}$. Unter Verwendung, dass $\log(x)$ die

Stammfunktion von $\frac{1}{x}$ ist erhält man

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{1}{6} \lim_{R\to+\infty} \left(\int_4^R \frac{1}{t-2}\,\mathrm{d}t - \int_4^R \frac{1}{t+4}\,\mathrm{d}t \right) \\
&= \frac{1}{6} \lim_{R\to+\infty} \big(\log(R-2) - \log(2) - \log(R+4) + \log(8) \big) \\
&= \frac{1}{6} \left(\log(4) + \lim_{R\to+\infty} \log\left(\frac{R-2}{R+4} \right) \right).
\end{aligned}$$

Da log stetig ist lässt sich der Grenzwert in das Argument des log hineinziehen. Der Bruch $\frac{R-2}{R+4} = \frac{1-\frac{2}{R}}{1+\frac{4}{R}}$ konvergiert für $R \to +\infty$ gegen 1 und $\log(1) = 0$. Insgesamt ergibt das

$$I_1 = \frac{1}{3}\log(2).$$

- Um die sich die Betragsfunktion zu ersparen teilt man I_2 in

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_4^5 \exp(-3(5-t))\,\mathrm{d}t + \int_5^{+\infty} \exp(-3(t-5))\,\mathrm{d}t \\
&= \exp(-15) \int_4^5 \exp(3t)\,\mathrm{d}t + \exp(15) \lim_{R\to+\infty} \int_5^R \exp(-3t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1-\exp(-3)}{3} + \frac{1}{3} - \exp(15) \lim_{R\to+\infty} \frac{\exp(-3R)}{3}.
\end{aligned}$$

Da $\exp(-3R)$ für $R \to +\infty$ gegen 0 konvergiert, erhält man

$$I_2 = \frac{2}{3} - \frac{\exp(-3)}{3}.$$

Nun ist I die Summe von I_1 und I_2

$$I = \frac{1}{3}\Big(2 + \log(2) - \exp(-3)\Big).$$