

Übungsblatt 2 für “Diskrete und geometrische Algorithmen”

9.) Sei $A[1..n]$ ein Feld mit n verschiedenen Zahlen. Wenn $i < j$ und $A[i] > A[j]$ gilt, dann wird das Paar (i, j) eine Inversion von A genannt.

- (a) Welches Feld mit Elementen der Menge $\{1, 2, \dots, n\}$ besitzt die meisten Inversionen und wie viele Inversionen sind in diesem Feld enthalten?
- (b) Wie ist die Beziehung zwischen der Laufzeit von Insertion Sort und der Anzahl der Inversionen im Eingabefeld? (Begründete Antwort!)
- (c) Geben Sie einen Algorithmus an, der die Anzahl der Inversionen einer Permutation von n Elementen bestimmt und dessen Laufzeit im schlechtesten Fall $\Theta(n \log n)$ ist.

Hinweis: Modifizieren Sie Merge Sort in geeigneter Weise.

10.) Die Fibonacci-Zahlen seien wie in der Vorlesung durch die Rekursion $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, für $n \geq 2$, mit den Anfangswerten $F_0 = 0$ und $F_1 = 1$ definiert.

- (a) Betrachten wir den folgenden einfachen rekursiven Algorithmus zur Berechnung der Zahlen F_n :

```
FIB(n)
IF n = 0 THEN
  RETURN 0
ELSIF n = 1 THEN
  RETURN 1
ELSE
  RETURN FIB(n - 1) + FIB(n - 2)
END IF
```

Offenbar hat man hierbei das Problem, daß in der Rekursion niedrigere Fibonacci-Zahlen oft neu berechnet werden müssen. Überlegen Sie sich beispielsweise, wie oft zur Berechnung von F_n die Zahl F_2 berechnet werden muß. Folgern Sie daraus, daß allgemein die Schrittzahl zur rekursiven Berechnung von F_n exponentiell wächst.

- (b) Etwas genauer: stellen Sie eine Rekursion für die Anzahl der Additionen $A(n)$, die im obigen Algorithmus bei der Berechnung von F_n gemacht werden auf und lösen Sie diese.

11.) Die Fibonacci-Zahlen können effizient mit Hilfe der folgenden auf Matrizenmultiplikation beruhenden Formel berechnet werden:

$$\begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n, \quad \text{für } n \geq 1.$$

(a) Verifizieren Sie diese Formel durch vollständige Induktion.

(b) Überlegen Sie sich einen rekursiven Algorithmus, der zur Berechnung von $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n$ nur logarithmisch viele Schritte benötigt.

12.) (a) Durch Aufstellen einer Rekursion und lösen derselben bestimmen Sie die Anzahl M_n der Teilmengen der Menge $[n] := \{1, 2, \dots, n\}$, die keine zwei aufeinanderfolgenden Zahlen enthalten.

(b) Bestimmen Sie weiters die Anzahl C_n der Teilmengen von $[n]$, welche keine zwei aufeinanderfolgenden Zahlen enthalten, wobei jetzt zusätzlich 1 als Nachfolger von n gilt (zyklische Anordnung).

13.) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Rekursion

$$a_n = \frac{n+2}{3n} a_{n-1} + n^2 + 3n + 2.$$

14.) Lösen Sie das System von Rekursionen

$$a_{n+1} = 2a_n + 4b_n, \quad b_{n+1} = 3a_n + 3b_n, \quad n \geq 0,$$

mit den Anfangswerten $a_0 = 1$ und $b_0 = -1$ indem Sie das System in eine äquivalente Rekursion zweiter Ordnung umformen.

15.) Nochmals zu den Fibonacci-Zahlen F_n : sei $(G_n)_{n \geq 0}$ die Folge der Quadrate der Fibonacci-Zahlen, also $G_n = F_n^2$. Man überlege sich, daß G_n ebenfalls eine homogene lineare Rekursion mit konstanten Koeffizienten erfüllt und bestimme solch eine.

16.) Die Türme von Hanoi: Gegeben seien 3 Stäbe A, B, C und n verschiedene Scheiben. Anfangs seien alle Scheiben auf Stab A der Größe nach aufgereiht, die größte ganz unten. Dieser Turm von Scheiben soll nun von A nach B transferiert werden, unter der Bedingung, daß in jedem Zug nur eine Scheibe bewegt und niemals eine größere Scheibe über einer kleineren platziert werden darf. Seien a_n die minimale Anzahl der benötigten Züge und b_n die minimale Anzahl benötigter Züge, wenn Bewegungen zwischen A und B nicht erlaubt sind. Bestimmen Sie a_n und b_n durch Aufstellen und Lösen einer Rekursion.