

## 5. Übungsblatt - Analysis auf Mannigfaltigkeiten - SS 2016

1. Sei  $M$  eine glatte Mannigfaltigkeit. Zeigen Sie, dass die eingebetteten Untermannigfaltigkeiten der Kodimension 0 in  $M$  genau die offenen Untermannigfaltigkeiten sind.
2. Es sei  $M$  eine glatte Mannigfaltigkeit und  $\theta : \mathcal{D} \rightarrow M$  ein glatter Fluss. Zeigen Sie, dass

$$p \mapsto V_p := \theta^{(p)'}(0)$$

ein glattes Vektorfeld  $V$  auf  $M$  definiert (den *infinitesimale Erzeuger* von  $\theta$ ) und dass jede Kurve  $\theta^{(p)}$  eine Integrialkurve auf  $V$  ist.

3. Berechnen Sie den Fluss der folgenden Vektorfelder in  $\mathbb{R}^2$ :

1.  $V = y \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$

2.  $Y = y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}$

4. Sei  $M$  eine glatte, kompakte Mannigfaltigkeit mit einem nirgends verschwindenden glatten Vektorfeld. Zeigen Sie, dass eine glatte Abbildung  $F: M \rightarrow M$  existiert, die homotop zur identischen Abbildung ist, aber keine Fixpunkte hat.
5. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

- (a) Seien  $V$  und  $W$  endlich-dimensionale Vektorräume. Angenommen  $\bar{\pi} : V \times W \rightarrow Z$  ist eine bilineare Abbildung in einen Vektorraum  $Z$  mit der folgenden Eigenschaft: Zu jeder bilinearen Abbildung  $A : V \times W \rightarrow Y$ , gibt es eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung  $\bar{A} : Z \rightarrow Y$ , sodass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc}
 V \times W & \xrightarrow{A} & Y \\
 \bar{\pi} \downarrow & \nearrow \bar{A} & \\
 Z & & 
 \end{array}$$

Dann gibt es einen eindeutig bestimmten Isomorphismus  $\Phi : V \otimes W \rightarrow Z$  mit  $\bar{\pi} = \Phi \circ \pi$ , wobei  $\pi : V \times W \rightarrow V \otimes W$  die kanonische Projektion bezeichnet.

- (b) Ist  $V$  ein endlich-dimensionaler reeller Vektorraum, dann ist der Raum  $T^k(V^*)$  aller kovarianten  $k$ -Tensoren auf  $V$  kanonisch isomorph zum  $k$ -fachen Tensorprodukt  $V^* \otimes \dots \otimes V^*$ .
6. Beweisen Sie folgende Aussagen:

- (a) Das symmetrische Produkt ist kommutativ und bilinear.
- (b) Sind  $S, T$  kovariante 1-Tensoren, dann gilt

$$ST = \frac{1}{2}(S \otimes T + T \otimes S).$$

7. Es sei  $M$  eine glatte Mannigfaltigkeit und  $A$  eine geschlossene Teilmenge von  $M$ . Es sei weiters  $\omega$  eine glatte Differentialform auf  $A$ , in dem Sinn, dass  $\omega$  zu einer glatten Differentialform in der Umgebung jedes Punktes von  $A$  fortgesetzt werden kann. Zeigen Sie, dass es zu jeder offenen Menge  $U$ , die  $A$  enthält, eine glatte Differentialform  $\bar{\omega} \in \Omega^k(M)$  gibt, sodass  $\bar{\omega}|_A = \omega$  und  $\text{supp } \bar{\omega} \subseteq U$ .