Übungsblatt 3 für Analyse von Algorithmen (24.10.2012)

11.) Sei

$$G(z) = \mathbb{E}(z^X) = \frac{1}{n}\frac{z^{n+1}-z}{z-1}$$

die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion der Zufallsvariablen X. Man berechne den Erwartungswert und die Varianz von X.
(Die Regel von l'Hospital ist hier eher unpraktisch...)

12.) Zu einer Zufallsvaraiblen X mir wahrscheinlichkeitserzeugenden Funktion $F(z) = \mathbb{E}(z^X) = \sum_{k\geq 0} p_k z^k$ (mit $p_k = \mathbb{P}[X = k]$) sei $M_s = \sum_{k\geq 0} k^s p_k = \mathbb{E}(X^s)$ das s-te Moment. (M_1 ... Erwartungswert, $M_2 - M_1^2$ ... Varianz.) Weiters bezeichne $\xi = \xi(X) = M_3 - 3M_2M_1 + 2M_1^3$. Man zeige für zwei unabhängige Zufallsvariable X und Y:

$$\xi(X+Y) = \xi(X) + \xi(Y).$$

Wie kann $\xi(X)$ (ähnlich wie die Varianz) gedeutet werden?

13.) Berechnen Sie

$$[z^n u^j]\frac{1}{(1-zu)(1-z)}\log\frac{1}{1-zu} \quad \text{und} \quad [z^n u^j]\frac{1}{(1-zu)(1-z)}\log\frac{1}{1-z}\,.$$

Anmerkung: für eine Potenzreihe $F(z) = \sum_{n\geq 0} F_n z^n$ bezeichnet $[z^n]F(z)$ den Koeffizienten von z^n in $F(z)$, also: $[z^n]F(z) = F_n$.

14.) Man behandle die Quicksort-Rekursion für den Erwartungswert der Anzahl der Vergleichsoperationen mit Hilfe einer Differentialgleichung:

(a) Aus

$$nC_n = n(n-1) + 2\sum_{k=0}^{n-1} C_k\,, \quad C_0 = C_1 = 0\,, \quad C(x) = \sum_{k\geq 0} C_k z^x$$

schließe man

$$C'(x) = \frac{2}{1-x}C(x) + \frac{2z}{(1-x)^3}\,.$$

(b) Man löse die Gleichung in a.) für $C(0) = 0$; $C'(0) = 0$ und lese daraus den Koeffizienten C_n ab.

15.) Man finde eine alternative Definition für die harmonischen Zahlen $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$, die auch für komplexe Zahlen Sinn macht. Genauer: Man finde eine "sinnvolle" Funktion $H(x)$, sodaß $H_n = H(n)$.
Hinweis: Studiere $\sum\limits_{k>0} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{n+k}\right)$.