Übungsblatt 5 für Analyse von Algorithmen (7.11.2012)

21.) Bei der Analyse von Hashing mit Linear Probing trat folgende Summe auf (mit $n \in \mathbb{N}$):

$$S(n,x,y) := (y-n)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(x+k)^{k+1}(y-k)^{n-k-1}.$$

Man zeige nun folgende Rekursion für $S(n,x,y)$:

$$S(n,x,y) = x(x+y)^n + nS(n-1,x+1,y-1), \text{ für } n \geq 1, \quad S(0,x,y) = x.$$

Daraus folgere man:

$$S(n,x,y) = \sum_{k=0}^{n}(x+k)n^{\underline{k}}(x+y)^{n-k}.$$

Anmerkung: Abels's Verallgemeinerung des Binomischen Lehrsatzes erweist sich als nützlich.

22.) Ramanujan's Q-Funktion sei definiert durch

$$Q(n) := \sum_{k\geq 0}\frac{(n-1)^{\underline{k}}}{n^k}.$$

Man zeige für natürliche Zahlen n:

$$1+Q(n) = \int_0^\infty e^{-x}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n dx.$$

23.) Man betrachte

$$\tilde{Q}(m,n) = \sum_{k\geq 0}\frac{n^{\underline{k}}}{m^k}.$$

Man setze $n = \alpha m$, mit $0 < \alpha < 1$ und studiere das asymptotische Verhalten von $\tilde{Q}(m,\alpha m)$ für $m \to \infty$.
Anleitung: Zeigen (beispielsweise durch Induktion) und werwenden Sie

$$n^k - \binom{k}{2}n^{k-1} \leq n^{\underline{k}} \leq n^k.$$

24.) Alternative Herleitung von Abel's Verallgemeinerung des Binomischen Lehrsatzes

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x(x-kz)^{k-1}(y+kz)^{n-k}.$$

Anleitung: Definiere $a_0(x,z) = 1$, $a_k(x,z) = \frac{x(x-kz)^{k-1}}{k!}$ für $k \geq 1$.

(a) Zeige
$$\frac{\partial^j}{\partial x^j} a_k(x,z) = a_{k-j}(x - jz, z)\,.$$

(b) Man fasse z stets als Parameter auf. Jedes $P(x)$ lässt sich eindeutig schreiben als $P(x) = \lambda_0 a_0 + \cdots + \lambda_n a_n$. Man zeige nun
$$\lambda_j = P^{(j)}(jz)\,.$$

(c) Wende die Darstellung
$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(kz) a_k(x,z)$$
auf das Polynom $(x+y)^n$ an.

25.) Zeige durch geeignete Wahl von $P(x)$:
$$a_n(x+y,z) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x,z) a_{n-k}(y,z)\,.$$