Übungsblatt 6 für Analyse von Algorithmen (14.11.2012)

26.) Das Parkproblem: eine Einbahnstraße besitze m in einer Reihe angeordnete Parkplätze, die von 1 bis m numeriert sind. Ein Mann fährt mit seiner im Auto eingeschlafenen Frau die Einbahnstraße entlang, plötzlich wacht die Frau auf und weist den Mann an, ehestmöglich zu parken. Daraufhin versucht er an der ersten freien Stelle zu parken, aber falls kein freier Parkplatz mehr verfügbar ist (also wenn beim Aufwachen der Frau Platz k erreicht ist, aber $k, k+1, \dots, m$ besetzt sind), beschließt er, nicht verkehrswidrig zu parken, sondern weiterzufahren. Wir nehmen nun an, dies geschieht für n verschiedene Autos, wobei die j-te Frau beim Parkplatz a_j aufwacht. Wie viele Folgen $a_1, a_2, \dots, a_n \in \{1, \dots, m\}^n$ gibt es dann, wo alle Autos geparkt werden können, unter der Voraussetzung, daß die Straße zu Beginn leer ist und keines der geparkten Autos wieder weggefahren wird?

Hinweis: es gibt einen einfachen Zusammenhang mit einer "Hilfsgröße", die bei der Analyse von Hashing mit Linear Probing studiert wurde.

27.) Betrachten Sie Binäre Suchbäume mit n gespeicherten Daten. Sei $P_{n,k}$ die Wahrscheinlichkeit, daß die letzte Eintragung k Schritte benötigt. Zeigen Sie:

(a) $\mathbb{E}C_{n-1}^{[\ell]} = \sum kP_{n,k}$ $\quad$ ($C_{n-1}^{[\ell]}$ ... Anzahl der Schritte bei der erfolglosen Suche)

(b) $nP_{n,k} = 2P_{n-1,k-1} + (n-2)P_{n-1,k}$

(c) Sei $P_n(z) = \sum_{k\geq 0} P_{n,k}z^k$. Zeigen Sie

$$P_n(z) = \prod_{2\leq j\leq n} \frac{2z+j-2}{j}\,.$$

Hieraus bestimme man Erwartungswert und Varianz.

28.) Beweisen Sie folgenden Zusammenhang zwischen der Internen Pfadlänge $I(t)$ und der Externen Pfadlänge $E(t)$ eines Binärbaums t:

$$E(t) = I(t) + 2|t|,$$

wobei Sie den Binärbaum bei der Wurzel in zwei (binäre) Teilbäume aufteilen und eine Induktion führen.

29.) Sei

$$f(z) = \frac{1-\sqrt{1-4z}}{2}.$$

Man betimme die Koeffizienten $[z^n]$ von $f(z)^r$, für $r \in \mathbb{N}$.

30.) Zur Pfadlänge in Tries: Lösen Sie (im Unterschied zur Vorlesung) die Funktionalgleichung

$$L(z) = z(e^z - 1) + 2e^{\frac{z}{2}} L(\frac{z}{2})$$

durch Iteration. Danach lesen Sie aus der Lösung die Koeffizienten ab und finden

$$L_n = n \sum_{k \geq 0} \left[1 - \left(1 - \frac{1}{2^k} \right)^{n-1} \right] .$$