Übungsblatt 10 für Analyse von Algorithmen (12.12.2012)

46.) Für eine natürliche Zahl $N \geq 1$ sei $\zeta_N = e^{2\pi i/N}$ die (primitive) N-te Einheitswurzel und F_N die Matrix $F_N = (\zeta_N^{jk})_{0 \leq j,k < N}$. Man zeige, dass die Matrix $F_N^{-1} = \frac{1}{N}(\zeta_N^{-jk})_{0 \leq j,k < N}$ die zu F_N inverse Matrix ist.

47.) Man zeige: $H_n = \displaystyle\sum_{1 \leq k \leq n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

48.) Es sei $\mu(n)$, $n \geq 1$, die Möbiusfunktion:

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & \text{für } n = 1, \\ (-1)^r & \text{wenn } n \text{ das Produkt von } r \text{ verschiedener Primzahlen ist,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Man zeige die Beziehung $\displaystyle\sum_{d|n} \mu(d) = 0$ für $n > 1$ und beweise damit die Beziehung

$$b_n = \sum_{d|n} a_d \qquad \Longleftrightarrow \qquad a_n = \sum_{d|n} b_d \, \mu(n/d).$$

49.) Was kann man über die Dirichletsche Reihe $\sum_{n \geq 1} \mu(n) n^{-s}$ sagen?

50.) Es sei $A(x)$ eine erzeugende Funktion mit $A(0) = 0$ und $B(x)$ sei durch

$$B(x) = \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k} A(x^k)$$

definiert. Man zeige

$$A(x) = \sum_{k \geq 1} \frac{\mu(k)}{k} B(x^k).$$