Übungsblatt 3 für "Analyse von Algorithmen"

11.) Drücken Sie

$$\sum_{1\le i\le j\le k\le n} a_i a_j a_k$$

durch

$$\sum_{1\le k\le n} a_k^r$$

aus. (r=1, 2, 3)

Hinweis: Beispielsweise gilt

$$\sum_{1\le i\le j\le n} a_i a_j = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} a_k^2.$$

12.) In der Vorlesung wurde bei der Analyse von Quicksort die Rekursion

$$C_n = n-1+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(C_{k-1}+C_{n-k}), \quad \text{für } n\ge 2, \quad \text{mit} \quad C_1=C_0=0$$

studiert.

Man analysiere folgende Varianten dieser Rekursion, die bei verschiedenen Implementierungen der Partitionierungsphase auftreten:

(a) Ersetze $n-1$ durch $n+1$.

(b) Ersetze $n-1$ durch $n+1-\frac{1}{n}$.

13.) Auch im "normalen" Quicksort-Fall kann man mit einer Differentialgleichung arbeiten:

(a) Aus

$$nC_n = n(n-1)+2\sum_{k=0}^{n-1} C_k\,, \quad C_0=C_1=0\,, \quad C(z)=\sum_{k\ge 0} C_k z^k$$

schließe man

$$C^{'}(z) = \frac{2}{1-z}C(z)+\frac{2z}{(1-z)^3}\,.$$

(b) Man löse die Gleichung in (a) für $C(0)=0$, $C^{'}(0)=0$.

14.) Man löse die bei der Analyse von "Median of Three"-Quickselect auftretende Differentialgleichung vom Euler'schen Typ

$$(1-z)^2 D''(z) = 12D(z) + \frac{12(1+z)}{(1-z)^3}, \quad D(0)=0, \; D'(0)=2.$$

Hinweis: Man studiere zuerst die entsprechende homogene Differentialgleichung: ein Ansatz der Form $D^{[h]}(z) = (1-z)^\alpha$ liefert dann eine quadratische Gleichung für α, woraus sich die allgemeine Lösung $D^{[h]}(z) = C_1(1-z)^{\alpha_1} + C_2(1-z)^{\alpha_2}$ ergibt. Um dann die Lösung der inhomogenen Differentialgleichung zu erhalten, verwende man die Methode "Variation der Konstanten" (siehe VO "Differentialgleichungen"), also $D(z) = C_1(z)(1-z)^{\alpha_1} + C_2(z)(1-z)^{\alpha_2}$.

15.) Bei der Analyse des Algorithmus Maximum-Suche wurde die folgende Rekursion der für $n \geq 1$ und $k \geq 0$ definierten $p_{n,k}$ erhalten:

$$\begin{aligned} p_{n,k} &= \frac{1}{n} p_{n-1,k-1} + \frac{n-1}{n} p_{n-1,k}, \quad n \geq 2, \\ p_{1,k} &= \delta_{0,k}, \quad p_{n,k} = 0 \text{ für } k < 0. \end{aligned}$$

Man gebe (durch Lösen der entstehenden Differentialgleichung) für die bivariate erzeugende Funktion

$$P(z,v) := \sum_{n\geq 1} \sum_{k \geq 0} p_{n,k} z^n v^k$$

eine geschlossene Formel an und setze diese mit der bivariaten erzeugenden Funktion $S(z,v)$ der vorzeichenlosen Stirlingzahlen 1. Art $\left[{n \atop k} \right]$ in Verbindung. Sie dürfen dabei verwenden:

$$S(z,v) := \sum_{n\geq 0} \sum_{k\geq 0} \left[{n \atop k} \right] \frac{z^n}{n!} v^k = \frac{1}{(1-z)^v}.$$