Übungsblatt 4 für "Analyse von Algorithmen"

16.) $I_n(k)$ sei die Anzahl der Permutationen von $\{1, \dots, n\}$ mit k Inversionen. Zeigen Sie:

$$\begin{aligned}
&I_n(k) = I_n(k-1) + I_{n-1}(k) \quad \text{für } k < n,\\
&\sum_k I_n(k) z^k = \prod_{k=0}^{n-1} (1 + \cdots + z^k),\\
&\sum_k I_n(k) = n!,\\
&\sum_k (-1)^k I_n(k) = 0, \quad n \geq 2,\\
&\sum_k k I_n(k) = \frac{1}{2}\binom{n}{2} n!.
\end{aligned}$$

17.) Sei $\overline{a_n}$ der Erwartungswert der Größe A im Problem des Permutierens *in situ*.
($A = |\{(i,k) | 1 \leq i < k \leq n, q(i) < q(i+1), q(i) < q(i+2), \dots, q(i) < q(k)\}|$, wenn die Permutation $q(1) \dots q(n)$ in kanonischer Zyklendarstellung gegeben ist.)
Alternative Herleitung: Sei

$$y_{i,j}(q) = \begin{cases} 1 & q(i) < q(k) \quad \text{für } k = i+1, \dots, j \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Sei $\overline{y_{i,j}}$ der zugehörige Erwartungswert. Man überprüfe die folgenden Behauptungen:

$$\begin{aligned}
\overline{a_n} &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} \overline{y_{i,j}},\\
\overline{y_{i,j}} &= \overline{y_{i+s,j+s}},\\
\overline{y_{1,j}} &= \frac{1}{j},\\
\overline{a_n} &= (n+1)H_n - 2n.
\end{aligned}$$

18.) Bubblesort: Betrachte die Inversionstafeln T_k nach dem k-ten Durchlauf:
$T_k = (b_1 \dot{-} k, b_2 \dot{-} k, \dots, b_n \dot{-} k)$.
Falls die Inversionstafel nach dem $(k-1)$-ten Durchlauf die Gestalt $T_{k-1} = (1, 0, \dots, 0)$ hat, könnte man nach dem k-ten Durchlauf sofort aufhören (durch eine zusätzliche Abfrage von $t = 1$). Man zeige nun, dass die Wahrscheinlichkeit, dass $t = 1$ ist, also dass $T_{letzerDurchlauf} = (1, 0, \dots, 0)$ ist, sich wie folgt berechnet:

$$\frac{1}{n!} \sum_{1 \leq k < n} k! k^{n-k-1}.$$

19.) Analysieren Sie den in der Vorlesung besprochenen Algorithmus “Sortieren durch Einfügen” (Insertion Sort).

20.) Bei dem in der Vorlesung besprochenen Sortieralgorithmus “Selection Sort” wurde nach dem Abarbeiten der t-Schleife der Vergleich $i \neq j$ und in diesem Fall $R_i \leftrightarrow R_j$ durchgeführt. Man bestimme nun den Erwartungswert der Anzahl des Auftretens von $i = j$ beim Sortieren einer zufälligen Permutation der Länge n. Ist diese zusätzliche Abfrage $i \neq j$ sinnvoll?