Übungsblatt 5 für "Analyse von Algorithmen"

21.) Auffinden des j-größten Elements aus $x[1], \ldots, x[n]$ mittels Quickselect.

Begründen Sie für die mittlere Anzahl $D_{n,j}$ der (rekursiven) Aufrufe (= Durchläufe) von Quickselect die Rekursion

$$D_{n,j} = 1 + \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{j-1} D_{n-k,j-k} + \sum_{k=j+1}^{n} D_{k-1,j}\right), \quad \text{für } n \geq j \geq 1\,.$$

Setzen Sie sodann $D_{n,j} = H_j + H_{n+1-j} - 1$ in die Rekursion ein und weisen Sie somit nach, dass die Formel stimmt.

22.) Begründen Sie für die mittlere Anzahl $C_{n,j}$ der Vergleiche bei Quickselect die Rekursion

$$C_{n,j} = n - 1 + \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{j-1} C_{n-k,j-k} + \sum_{k=j+1}^{n} C_{k-1,j}\right), \quad \text{für } n \geq j \geq 1\,.$$

Es läßt sich zeigen (z.B. durch den Nachweis, dass die unten angegebene Lösung obige Rekursion erfüllt; aber Sie brauchen das hier nicht nachrechnen), dass $C_{n,j}$ durch folgende explizite Formel gegeben ist:

$$C_{n,j} = 2\left[(n+1)H_n - (n+3-j)H_{n+1-j} - (j+2)H_j + n + 3\right]\,.$$

Von besonderem Interesse ist die Bestimmung des Medians. Setzen Sie deshalb in obiger Formel $n = 2N+1$ und $j = N+1$ und bestimmen Sie das asymptotische Verhalten von $C_{2N+1,N+1}$ für $N \to \infty$.

23.) Sei $G(z)$ eine wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion. Die sogenannten Semi-Invarianten oder Kumulanten κ_n, $n \geq 1$ sind definiert durch

$$\sum_{n\geq 1} \kappa_n \frac{t^n}{n!} = \ln G(e^t), \ \text{ also } \ \kappa_n = \left.\frac{d^n}{dt^n} \ln G(e^t)\right|_{t=0}.$$

Es gilt also beispielsweise $\kappa_1 = G'(1)$, $\kappa_2 = G''(1) + G'(1) - \big(G'(1)\big)^2$.

Sei nun $F(z)$ definiert mittels $F(z) := z^m G(z)$ für ein beliebiges $m \in \mathbb{N}$ und bezeichne $\tilde{\kappa}_n$ die entsprechenden Semi-Invarianten. Welcher Zusammenhang besteht nun zwischen den κ_n und den $\tilde{\kappa}_n$?

24.) Falls für eine Diskrete Zufallsvariable X gilt, daß für alle $k \geq 0$: $\mathbb{P}\{X = k\} = \frac{e^{-\mu}\mu^k}{k!}$, dann heißt X Poisson-verteilt mit Parameter μ. Man berechne nun die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion $G(z) = \sum_{k \geq 0} \mathbb{P}\{X = k\} z^k$ und berechne weiters die im vorigen Bsp. definierten Semi-Invarianten κ_n.

25.) Sei $\pi = a_1 \ldots a_n$ eine Permutation von $\{1, \ldots, n\}$ und $\pi^{-1} = a_1^{'}, \ldots, a_n^{'}$ die entsprechende inverse Permutation. Zeige: Die Anzahl der Durchläufe in Bubblesort bei Eingabe von $a_1 \ldots a_n$ ist $1 + \max\{a_1^{'} - 1, \ldots, a_n^{'} - n\}$.