Übungsblatt 8 für "Analyse von Algorithmen"

36.) Zur Pfadlänge in Tries: Lösen Sie die Funktionalgleichung

$$L(z) = z(e^z - 1) + 2e^{\frac{z}{2}} L(\frac{z}{2})$$

durch Iteration. Danach lesen Sie aus der Lösung die Koeffizienten ab und finden so die alternative Darstellung

$$L_n = n \sum_{k \geq 0} \left[1 - \left(1 - \frac{1}{2^k} \right)^{n-1} \right] .$$

37.) Analoge Vorgangsweise für die Anzahl der internen Knoten in Tries ausgehend von der Funktionalgleichung

$$G(z) = e^z - (1 + z) + 2e^{\frac{z}{2}} G(\frac{z}{2}) ,$$

welche die folgende alternative Darstellung liefert:

$$I_n = \sum_{k \geq 0} \left\{ 2^k \left[1 - \left(1 - \frac{1}{2^k} \right)^n \right] - n \left(1 - \frac{1}{2^k} \right)^{n-1} \right\} .$$

38.) Mittlere interne Pfadlänge in Digitalen Suchbäumen.

Wie bei Tries sind den Daten $0-1$-Folgen zugeordnet. Wie bei binären Suchbäumen werden die Daten der Reihe nach als interne Knoten eingetragen, wobei man, falls ein Knoten schon besetzt ist, nach links (0) bzw. rechts (1) verzweigt, und dafür fortlaufend die Bits verwendet.

(a) Man betrachte ein selbstgewähltes Beispiel mit 5 Daten und konstruiere den Digitalen Suchbaum.

(b) Zeigen Sie für die mittlere Interne Pfadlänge A_n von Digitalen Suchbäumen mit $n \geq 1$ Daten:

$$A_n = n - 1 + \sum_{k=0}^{n-1} 2^{1-n} \binom{n-1}{k} (A_k + A_{n-1-k}) .$$

39.) Fortsetzung von Bsp. 38.):

(a) Sei

$$A(z) = \sum_{n \geq 0} A_n \frac{z^n}{n!} .$$

Zeige:

$$A'(z) = ze^z + 2e^{\frac{z}{2}} A(\frac{z}{2}) .$$

(b) Setze $B(z) = e^{-z}A(z)$. Zeige

$$B'(z) + B(z) = z + 2B(\frac{z}{2})\,.$$

40.) Fortsetzung von Bsp. 39.):

(a) Sei

$$B(z) = \sum_{n\geq 0} B_n \frac{z^n}{n!}\,.$$

Zeige:

$$B_n = -(1 - 2^{2-n})B_{n-1}, \quad \text{für } n \geq 3$$

bzw.

$$B_n = (-1)^n Q_{n-2} \quad \text{mit} \quad Q_n = \prod_{1\leq j\leq n} \left(1 - \frac{1}{2^j}\right)\,.$$

(b) Daraus folgere man:

$$A_n = \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k Q_{k-2}\,.$$