

Übungsblatt 11 für “Analyse von Algorithmen”

- 51.) Sei $t \in \mathbb{N}$ ein Parameter. Die gewöhnliche erzeugende Funktion $y(z)$ sei implizit definiert durch die Gleichung

$$y^{1-t} - y^{-t} = z.$$

Substituieren Sie

$$z = \frac{u}{(1+u)^t}$$

und zeigen Sie mit der Cauchy'schen Integralformel, daß für $r \in \mathbb{N}$ gilt:

$$y^r = \sum_{k \geq 0} \binom{tk+r}{k} \frac{r}{tk+r} z^k.$$

- 52.) Zeigen Sie: Für $k \geq n^{\frac{1}{2}+\epsilon}$ gilt

$$\frac{\binom{2n}{n-k}}{\binom{2n}{n}} = \mathcal{O}\left(e^{-\frac{1}{2}n^{2\epsilon}}\right).$$

Dazu kann man beispielsweise für $k \leq n$ die Beziehung

$$\frac{\binom{2n}{n-k}}{\binom{2n}{n}} = \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{(n+k)(n+k-1) \cdots (n+1)} = \left(1 - \frac{k}{n+k}\right) \cdots \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) \leq \left(1 - \frac{k}{n+k}\right)^k$$

benutzen.

- 53.) Man finde den ersten Term in der asymptotischen Entwicklung von

$$\sum_{k \geq 1} e^{-\frac{k^3}{n}}.$$

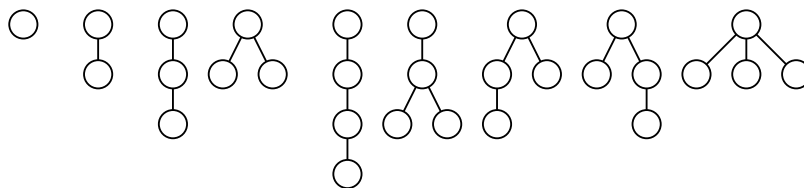
- 54.) Sei a_1, a_2, \dots, a_{2n} eine Permutation der Zahlen $\{1, 2, \dots, 2n\}$. Wir nennen solch eine Permutation “2-sortiert”, wenn

$$a_1 < a_3 < a_5 < \cdots < a_{2n-1}, \quad \text{sowie} \\ a_2 < a_4 < a_6 < \cdots < a_{2n}.$$

- (a) Interpretation von 2-sortierten Permutationen als Gitterpfade. Von $(0, 0)$ (links unten) nach (n, n) (rechts oben) sind Schritte nach rechts bzw. oben um eine Einheit erlaubt. Man betrachte nun sukzessive die Zahlen $1, 2, \dots, 2n$ in der 2-sortierten Permutation. Falls k an einer ungeraden Stelle steht, gehe man nach oben, falls k an einer geraden Stelle steht, gehe man nach rechts. Man überlege sich, daß eine Bijektion zwischen den Gitterpfaden und den 2-sortierten Permutationen vorliegt und betrachte einige explizite Beispiele.

- (b) Man interpretiere den Parameter “Anzahl der Inversionen” geeignet. (Eine bestimmte Fläche.)

55.) Ein ebener Wurzelbaum besteht aus einem Wurzelknoten, wo eine Folge von beliebig vielen Unterbäumen (ergo, die links-rechts-Reihenfolge der Unterbäume ist wichtig), die selbst wiederum ebene Wurzelbäume sind, dranhängen. Alle ebenen Wurzelbäumen mit höchstens 4 Knoten sind nachfolgend angegeben.



- (a) Man interpretiere ebene Wurzelbäume als Gitterpfade, indem man, bei der Wurzel startend, um den Baum herumfährt und einen Abwärtsschritt als \nearrow und einen Aufwärtsschritt als \searrow zeichnet. Man betrachte ein repräsentatives Beispiel. Was haben diese Pfade für Eigenschaften?
- (b) Man bestimme die Anzahl der Gitterpfade von $(0, 0)$ nach $(2n, 0)$, die nie unterhalb der x -Achse sind.

Anleitung: Man nehme alle Pfade und ziehe die Anzahl derjenigen Pfade ab, die sehr wohl ins Negative geraten. Diese klassifiziere man nach dem ersten Zeitpunkt wo dies geschieht. Durch eine geeignete Spiegelung gelingt deren Abzählung (Andre’sches Spiegelungsprinzip).