

Name:

Mat.Nr.:

Bitte keinen Rotstift verwenden!

**Finanzmathematik 1: diskrete Modelle**  
**(Vorlesungsprüfung)**  
**7. Oktober 2013**

Dauer: 90 Minuten

Bei der schriftlichen Prüfung darf ein nicht programmierbarer Taschenrechner und ein von Hand (beidseitig) beschriebener A4-Zettel benutzt werden.

Anmeldung zur mündlichen Prüfung im Sekretariat,  
Sandra Trenovatz (sandra@fam.tuwien.ac.at).

---

Bsp.	Max.	Punkte
1	25	
2	35	
3	40	
$\Sigma$	100	

Schriftlich:

AssistentIn:

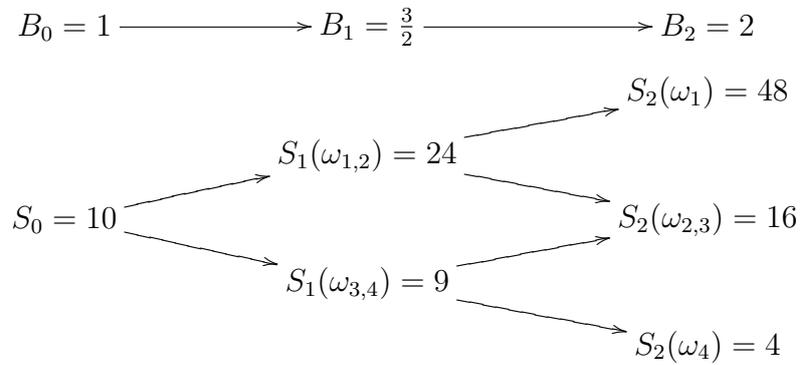
Mündlich:

**Gesamtnote:**



## 2. Zwei-Perioden-Modell: Snell-Einhüllende

Betrachten Sie das folgende Zweiperiodenmodell mit einem risikolosen und einem riskanten Finanzgut  $B$  und  $S$ . Desweiteren sei  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ ,  $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ ,  $\mathcal{F}_1 = \sigma(S_1)$ ,  $\mathcal{F}_2 = \sigma(S_1, S_2) = \mathcal{P}(\Omega)$  und  $P(\omega_i) > 0$  für  $i \in \{1, \dots, 4\}$ .



1) Bestimmen Sie das äquivalente Martingalmaß. 5 Pkt

2) Geben Sie zunächst die Definition der Snell'schen Einhüllenden an. Berechnen Sie anschließend die Snell-Einhüllende des Claims  $C_0 = 0$ ,  $C_1(\omega_{1,2}) = 21$ ,  $C_1(\omega_{3,4}) = 18$ ,  $C_2(\omega_1) = 32$ ,  $C_2(\omega_2) = C_2(\omega_3) = 28$  und  $C_2(\omega_4) = 8$ . 20 Pkt

3) Berechnen Sie die minimale optimale Stoppzeit  $\tau_{min}$ . 10 Pkt

### 3. Entropie

$\mathcal{M}$  sei die Menge aller Wmaße auf dem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ .

1) Geben Sie die Definition der *relativen Entropie*  $H(Q, P)$  des Wahrscheinlichkeitsmasses  $Q$  bezüglich  $P$  an. 5 Pkt

2) Beweisen Sie:

$$H(Q, P) \geq 0. \quad (1) \quad 15 \text{ Pkt}$$

Zeigen Sie, dass Gleichheit in (1) genau dann gilt, wenn  $P = Q$  erfüllt ist.

3)  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  sei nun ein endlicher Wahrscheinlichkeitsraum mit  $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$  und  $P(\{\omega\}) = \frac{1}{|\Omega|}$  für alle  $\omega \in \Omega$ . Für  $Q \in \mathcal{M}$  heißt 20 Pkt

$$H(Q) := - \sum_{\omega \in \Omega} Q(\{\omega\}) \log Q(\{\omega\}) \quad (2)$$

*Entropie* von  $Q$ , wobei  $0 \log 0 := 0$  gilt. Zeigen Sie:

$$\max_{Q \in \mathcal{M}} H(Q) = H(P). \quad (3)$$

Hinweis zu Teilaufgabe 3): Stellen Sie einen Zusammenhang zwischen  $H(Q)$  und  $H(Q, P)$  und verwenden Sie anschließend Teilaufgabe 2).