

## Übungen zur Vorlesung Einführung in die Numerik von Differentialgleichungen

### Serie 11

**Aufgabe 42.** Bestimmen Sie die Stabilitätsfunktion des  $\theta$ -Schemas. Für welche  $\theta$  ist das  $\theta$ -Schema A-stabil, für welche L-stabil?

**Aufgabe 43.** Bestimmen Sie das Stabilitätsgebiet für das  $\theta$ -Schema mit  $\theta = 1/2$ .

**Aufgabe 44.** Für ein lineares  $k$ -Schrittverfahren ist Folgendes paarweise äquivalent:

- (i) Das Verfahren hat Konsistenzordnung  $p$
- (ii) Es gelten  $\sum_{j=0}^k \alpha_j = 0$  und  $\sum_{j=0}^k \alpha_j j^q = q \sum_{j=0}^k \beta_j j^{q-1}$  für alle  $q = 1, \dots, p$ .
- (iii) Der Abschneidefehler erfüllt  $R(t, \pi_p, h) = 0$  für alle Polynome  $\pi_p$  vom Grad  $p$ .

**Aufgabe 45.** Welche Konsistenzordnung haben das Adams-Bashforth-Verfahren und das Adams-Moulton-Verfahren?

**Programmieraufgabe 15.** Implementieren Sie eine MATLAB- Funktion

```
y = lieuler(t,f,fprime,y0)
```

die das linear-implizite Euler-Verfahren aus Aufgabe 41 zur Lösung des Anfangswertproblems  $y' = f(y)$  mit  $y(t_1) = y_0$  realisiert. Dabei ist  $t \in \mathbb{R}^n$  ein Zeilenvektor mit den Stützstellen des Verfahrens,  $y_0 \in \mathbb{R}^d$  ist ein Spaltenvektor mit dem Anfangswert, und  $\mathbf{f}$  und  $\mathbf{fprime}$  sind Funktionshandles für die Funktion  $f(y)$  sowie deren Jacobi-Matrix  $D_y f(y)$ . Der Rückgabewert  $y$  ist eine  $d \times n$  Matrix, deren Spalte  $y(:,k)$  die Approximation  $y_k$  zum Zeitpunkt  $t_k$  enthält.

**Programmieraufgabe 16.** Betrachten Sie das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} y_1' &= -0.04y_1 + 10^4 y_2 y_3 \\ y_2' &= 0.04y_1 - 10^4 y_2 y_3 - 3 \cdot 10^7 y_2^2 \\ y_3' &= 3 \cdot 10^7 y_2^2 \end{aligned}$$

mit den Anfangsbedingungen  $y(0) = (1, 0, 0)$ . Bei  $t = 0.3$  ist der "exakte" Wert  $y_2(0.3) = 3.447715743690469 \cdot 10^{-5}$ . Visualisieren Sie die Konvergenz von explizitem, implizitem und linear-implizitem Eulerverfahren für dieses System, indem Sie den Fehler in  $y_2$  im Endzeitpunkt  $t = 0.3$  für uniforme Gitter in Abhängigkeit von der Anzahl  $n$  an Stützstellen plotten. Zusätzlich visualisiere man die entsprechenden Konvergenzordnungen. Der Plot (6 *verschiedenfarbige* Konvergenzgraphen in einem Bild) ist im eps-Format abzugeben. Bitte markieren Sie die gerechneten Werte auf den 3 Fehlerkurven geeignet.