

MATHEMATISCHE STATISTIK

<http://www.statistik.tuwien.ac.at/lv-guide>

VO: Prof. Felsenstein

WS 2014

ÜBUNGSBLATT 1

- 1) Man zeige die bedingte *Markov-Ungleichung*: Für $\eta : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ monoton wachsend und eine Stochastische Größe X und eine sub- σ -Algebra \mathcal{F} von \mathcal{A} gilt

$$\mathbf{P}[|X| > \epsilon | \mathcal{F}] \leq \frac{\mathbb{E}[\eta(|X|) | \mathcal{F}]}{\eta(\epsilon)} .$$

- 2) Die 2-dimensionale Stochastische Größe (X, Y) habe die Dichtefunktion

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{für } 0 < x \leq 1, 0 < y \leq x \\ 0 & \text{sonst .} \end{cases}$$

Man gebe die bedingten Dichten von $X|Y = y$ bzw. $Y|X = x$ und die zugehörigen Erwartungswerte $\mathbb{E}(X|Y = y)$ und $\mathbb{E}(Y|X = x)$ an.

- 3) (WALD'SCHE IDENTITÄT) Es sei X_1, X_2, \dots eine Folge reelwertiger, unabhängiger und identisch verteilter stochastischer Größen und N eine von $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ unabhängige stochastische Größe auf \mathbb{N} . Die (stochastische) Summe sei $S = X_1 + X_2 + \dots + X_N$.

- a) Man zeige

$$\mathbb{E}(S) = \mathbb{E}(N) \cdot \mathbb{E}(X_1).$$

- b) Für eine Folge Poisson-verteilter Größen $X_i \sim P_\eta$ und $N \sim P_\gamma$ berechne man $\mathbf{P}[S = 0]$.

- 4) X_1 sei Binomialverteilt $X_1 \sim B_{n,p}$. X_2 ist unabhängig von X_1 und ebenfalls Binomialverteilt $X_2 \sim B_{m,p}$ mit derselben Eintrittswahrscheinlichkeit p . Welche Verteilung (Punktwahrscheinlichkeiten) hat $X_1|X_1 + X_2$?

- 5) Man zeige, daß der Quotient

$$\frac{V/k}{W/l}$$

für unabhängige stochastische Größen $V \sim \chi_k^2$ und $W \sim \chi_l^2$ einer $F_{k,l}$ -Verteilung folgt. (Satz 1.3 der Vorlesung)

- 6) Die stochastische Größen $X \sim N(0, 1)$ und $V \sim \chi_k^2$ seien unabhängig. Man zeige

$$\frac{X}{\sqrt{V/k}} \sim t_k.$$

(Satz 1.4 der Vorlesung)