9. Übung aus Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie
WS 2015

1. Man zeige, dass die bedingten Erwartungen $(\mathbb{E}(X_i|\mathfrak{A}),\ i \in I)$ einer gleichmäßig integrierbaren Familie von Zufallsvariablen $(X_i,\ i \in I)$ auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$ ebenfalls gleichmäßig integrierbar sind für jede σ-Algebra $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{S}$. Weiters zeige man, dass dann aus $\lim_n X_n = X$ P–fs folgt $\lim_n \|\mathbb{E}(X_n|\mathfrak{A}) - \mathbb{E}(X|\mathfrak{A})\|_1 = 0$, dass aber i.A. nicht gilt $\lim_n \mathbb{E}(X_n|\mathfrak{A}) = \mathbb{E}(X|\mathfrak{A})$ P–fs, d.h. der verallgemeinerte Konvergenzsatz von Lebesgue für gleichmäßig integrierbare Folgen lässt sich nicht auf bedingte Erwartungen erweitern.
Hinweis: Bilden Sie aus der unabhängigen Folge (X_n) mit $X_n \sim B_{\frac{1}{n}}$ die Folgen $Y_n := (2\,n-1)\,X_{2\,n-1},\ Z_n := Y_n\,X_{2\,n}$ und vergleichen Sie das Konvergenzverhalten der Folge (Z_n) mit dem der bedingten Erwartungen $\mathbb{E}(Z_n|\mathfrak{A}_\sigma(X_{2\,n},\ n \in \mathbb{N}))$.

2. Für unabhängige Zufallsvariable $X\,, Y \sim B_p$ und $Z := \min\{1\,, X+Y\}$ bestimme man $\mathbb{E}\,(X\,|Z)\,,\ \mathbb{E}\,(Y\,|Z)$ und überprüfe, ob diese bedingten Erwartungen unabhängig sind.

3. Man zeige, dass $\mathbb{E}(Y|\mathfrak{A}_\sigma(\mathfrak{A} \cup \mathfrak{C})) = \mathbb{E}\,(Y|\mathfrak{A})$ i.A. nicht gilt, wenn nur die σ-Algebren $\mathfrak{S}(Y)$ und $\mathfrak{A}$ unabhängig von der σ-Algebra $\mathfrak{C}$ sind.

4. Man bestimme für $(X\,, Y) \sim N(0, 0, 1, 1, \rho)$ die bedingten Dichten und berechne $\mathbb{E}(Y|X)$ und $\mathbb{E}(\sigma_2\,Y + \mu_2|\sigma_1\,X + \mu_1)$ mit $\sigma_i > 0\,,\ i = 1\,, 2\,.$
Hinweis: $\frac{x^2-2\,\rho\,x\,y+y^2}{2(1-\rho^2)} = \frac{x^2}{2} + \frac{(y-\rho\,x)^2}{2\,(1-\rho^2)}\,.$

5. Man zeige, dass für alle quadratisch integrierbaren Zufallsvariablen $X\,, Y$ auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega\,, \mathfrak{S}\,, P)$ und alle σ-Algebren $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{S}$ gilt $\mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X|\mathfrak{C})\,)^2 \le \mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X|\mathfrak{A})\,)^2\,.$

6. Man beweise, ohne Beispiel 7. zu verwenden, dass auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$ für $X\,, Y \in \mathcal{L}_2(\Omega, \mathfrak{S}, P)$ gilt

$$\mathbb{E}(X|Y) = Y\ P\text{-fs} \wedge\ \mathbb{E}(Y|X) = X\ P\text{-fs}\ \Rightarrow\ X = Y\ P\text{-fs}\,.$$

7. Man beweise, dass für integrierbare Zufallsvariable $X\,, Y$ auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$ gilt

$$\mathbb{E}(X|Y) = Y\ P\text{-fs} \wedge\ \mathbb{E}(Y|X) = X\ P\text{-fs}\ \Rightarrow\ X = Y\ P\text{-fs}\,.$$

Hinweis: Was folgt aus $[Y \le c] = [X > c, Y \le c] \cup [X \le c, Y \le c]$ für die Integrale von $X - Y$ über diese Bereiche?