2. Übung aus Elemente der mathematischen Stochastik WS 2012

1. Man zeige, dass es zu jeder stochastischen Matrix $\Pi := (p_{i,j})$ mit den Potenzen $P^n := \left(p_{i,j}^{(n)}\right)$ und jedem $i_0 \in \mathbb{N}$ einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$ und Zufallsvariable $X_n\,, m \in \mathbb{N}$ gibt, sodass für alle $n \in \mathbb{N}$ alle $(i_1, \ldots, i_n) \in \mathbb{N}^n$ und alle $t_1 < \cdots < t_n\,, t_i \in \mathbb{N}$ mit $t_0 := 0$ gilt
$$P(X_{t_1} = i_1, \ldots, X_{t_n} = i_n) = \prod_{j-1}^{n} p_{i_{j-1},i_j}^{(t_j - t_{j-1})}\,.$$
2. Man zeige, dass das 0-1-Gesetz von Hewitt-Savage i.A. nicht gilt, wenn die Zufallsvariablen zwar unabhängig aber nicht identisch verteilt sind.
3. Für eine Folge (X_n) unabhängig, identisch verteilter Zufallsvariabler beweise man, dass mit $S_n := \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ gilt $P\left(\limsup\limits_n [S_n = 0]\right) \in \{0, 1\}$ und $\limsup\limits_n S_n = c$ P–fs. mit $c \in \overline{\mathbb{R}}$.