3. Übung aus Elemente der mathematischen Stochastik WS 2012

1. Man zeige, dass für quadratisch integrierbare Zufallsvariable $X\,,Y$ auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega\,,\mathfrak{S}\,,P)$ und jede σ-Algebra $\mathfrak{A}\subseteq\mathfrak{S}$ gilt
$$\mathbb{E}[Y\,\mathbb{E}(X|\mathfrak{A})]=\mathbb{E}[X\,\mathbb{E}(Y|\mathfrak{A})]\,.$$
2. Für $(X_1,\ldots,X_m)\sim B_{n;p_1,\ldots,p_m}$ bestimme man $\mathbb{E}(X_i|X_j)\,,i\neq j$ und verwende das Ergebnis zur Berechnung von $\mathrm{Cov}(X_i,X_j)$
Hinweis: $(X_1,\ldots,X_m)\sim B_{n;p_1,\ldots,p_m}$ bedeutet
$P(X_1=x_1,\ldots,X_m=x_m)=\binom{n}{x_1!\cdots x_m!}\prod\limits_{i=1}^m p_i^{x_i}$ mit $\sum\limits_{i=1}^m x_i=n\,,\ \sum\limits_{i=1}^m p_i=1$
3. Man beweise, dass für eine Folge (X_n) unabhängig identisch verteilter Zufallsvariabler mit endlichem Erwartungswert $\mu:=\mathbb{E}X$ und eine davon unabhängige Zufallsvariable T mit Werten in $\mathbb{N}$ und $\tau:=\mathbb{E}T<\infty$ gilt
$$\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^T X_i\,\middle|\,T\right)=\mu\,T\quad\text{und}\quad\mathbb{E}\sum_{i=1}^T X_i=\mu\,\tau\,.$$
Hinweis: Auch die Integrierbarkeit von $\sum\limits_{i=1}^T X_i$ ist zu zeigen.