

## 4. Übung aus Elemente der mathematischen Stochastik WS 2012

1. Man zeige, dass für alle quadratisch integrierbaren Zufallsvariablen  $X, Y$  auf einem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathfrak{G}, P)$  und alle Subsigmaalgebren  $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{G}$  gilt  $\mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X|\mathfrak{C}))^2 \leq \mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X|\mathfrak{A}))^2$ .
2. Man beweise, dass auf einem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathfrak{G}, P)$  für  $X, Y \in \mathcal{L}_2(\Omega, \mathfrak{G}, P)$  gilt

$$\mathbb{E}(X|Y) = Y \text{ P-fs} \wedge \mathbb{E}(Y|X) = X \text{ P-fs} \Rightarrow X = Y \text{ P-fs}.$$

3. Ist  $(\Omega, \mathfrak{G}, P)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum,  $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{G}$  eine  $\sigma$ -Algebra,  $1 \leq p$ ,  $q := \frac{p}{p-1}$ ,  $X \in \mathcal{L}_p(\Omega, \mathfrak{G}, P)$  und  $Y \in \mathcal{L}_q(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ , so gilt

$$Y = \mathbb{E}(X|\mathfrak{A}) \Leftrightarrow \int Y Z dP = \int X Z dP \quad \forall Z \in \mathcal{L}_q(\Omega, \mathfrak{A}, P). \quad (0.1)$$