Übung 1

1) Ist folgendes Wahr?:
Für alle Wahrscheinlichkeitsmaße μ und ν auf X bzw. Y, gilt

$$\pi \in \Pi(\mu, \nu) \Rightarrow \pi \ll \mu \otimes \nu,$$

das heißt, der unabhängige Transportplan dominiert (im Sinne von absoluter Stetigkeit von Massen) jeden anderen Transportplan. Wenn nicht, muss es immer einen anderen dominierenden Plan $\pi^* \in \Pi(\mu, \nu)$ geben?

2) Sei $X = Y = \mathbb{R}^n$ und μ, ν absolut stetig bzgl. dem Lebuesguemass auf $\mathbb{R}^n$, mit den Dichten f bzw. g. Finden Sie eine (heuristische) Bedingung/Formel für $T : X \to Y$, die nur von f und g abhängt, so dass $T(\mu) = \nu$ gilt (d.h. ν ist gleich dem Bildmass von μ unter T). Finden Sie Beispiele für die $T(\mu) = \nu$ gilt aber wo die gefundene Bedingung/Formel sinnlos ist.

3) Gegeben T^1, T^2 mit $T^1(\mu) = T^2(\mu) = \nu$, und $T_\lambda := \lambda T^1 + (1 - \lambda)T^2$ mit $\lambda \in [0, 1]$, muss immer $T_\lambda(\mu) = \nu$ gelten? Ist zu erwarten, dass die Bedingung $T(\mu) = \nu$ im Allgemeinen "kompakt in T" ist?

4) Seien $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, $Y = \{y_1, \ldots, y_n\}$ und μ,ν die Uniformverteilungen auf X,Y. Zu beweisen ist die folgende Behauptung: Für eine Kostenfunktion c auf $X \times Y$ haben das Kantorovich-Transportproblem und das Monge-Transportproblem (zwischen μ und ν) den selben Wert, und es gibt mindestens eine optimale Monge Transport Map. Beweisen Sie dazu die folgenden Argumente:

4.i) Das Kantorovich-Problem lässt sich als Optimierungsproblem über Doppelstochastische Matrizen (von Grösse $n \times n$) schreiben. Die Monge Maps entprechen genau den Permutationsmatrizen.

4.ii) Beweisen Sie Problem 4 in [Villani (2003): Warm-up Exercises], nähmlich, dass die Menge der extremalen Punkte der Menge der Doppelstochastische Matrizen gleich der Menge der Permutationsmatrizen ist.

4.iii) Choquets Theorem (wie in [Villani (2003): Warm-up Exercises, Problem 3]) sagt, dass ein lineares Optimierungsproblem auf einer kompaten Menge von mindestens einem extremalen Punkt der Menge gelöst wird. Nutzen Sie (ohne Beweis) diesen Satz um unsere Behauptung zu beweisen.